

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 1

1 OCTOMBRIE 1941



SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 1

1 OCTOMBRIE 1941

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

REDACȚIA SUPLIMENTULUI CU EXERCITII VOL. VII A FOST:

OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, GENERAL GH. BUICLIU, G. G. CONSTANTINESCU, V. GHÎȚESCU, H. P. IONESCU, C. IONESCU-BUJOR, CĂP. C. D. IONESCU-ȚIU, COMANDOR I. LINTEȘ, N. N. MIHĂILEANU, G. D. SIMIONESCU, O. N. ȚINO, membri delegați pentru propuneri de exerciții și corectarea soluțiilor primite.

O. N. ȚINO, membru delegat pentru coordonarea exercițiilor propuse.

OTILIA GEORGESCU-ROEGEN, G. G. CONSTANTINESCU, C. IONESCU-BUJOR, membri delegați pentru alcătuirea tabloului de rezolvitori.

C. IONESCU-BUJOR, membru delegat pentru coordonarea exercițiilor rezolvate, imprimarea revistei și corecturi.

CONCURS DE MECANICĂ

Pentru a mări interesul elevilor de liceu pentru *Mecanică*, se institue de către *Suplimentul cu exerciții al Gazetei Matematice*, un concurs de Mecanică în lunile Februarie, Martie și Aprilie 1942.

Condițiile de participare sunt:

1. Candidații vor fi elevi de liceu, corespondenți la *Suplimentul cu exerciții al Gazetei Matematice*.

2. Soluțiile problemelor propuse în lunile de mai sus, vor fi trimise la Societatea *Gazeta Matematică*, până cel mai târziu 15 Mai 1942.

Premiile ce se oferă sunt:

Premiul I în valoare de lei 2000 (două mii).

Premiul II „ „ „ „ 1000 (una mie).

Rezultatele se vor publica în numărul din Iunie al *Suplimentului*.

EXERCIIII REZOLVATE

Clasa III-a. Exerc. 157. *Un aliaj are greutatea 4 kg. și titlul 0,800. Cât metal neprețios trebuie scos pentru ca titlul să devină 0,900 ?*

Dacă s'ar scoate $\frac{2}{5}$ din metalul neprețios ce se află în aliaj, cât ar fi titlul noului aliaj ?

C. I. B.

1. Cantitatea de metal prețios este

$$4 \times 0,8 = 3,2 \text{ kg.}$$

Aceasta este și cantitatea de metal prețios din aliajul final și cum titlul acestui aliaj este de 0,900, greutatea sa este

$$3,2 : 0,9 = 3,555 \text{ kg.}$$

Metalul neprețios scos este :

$$4 - 3,555 = 0,445 \text{ kg.}$$

2. Cantitatea de metal prețios aflată în aliaj este

$$4 - 3,2 = 0,8 \text{ kg.}$$

$\frac{2}{5}$ din această greutate este

$$\frac{0,8 \times 2}{5} = \frac{1,6}{5} = 0,32 \text{ kg.}$$

Greutatea aliajului după scoaterea celor $\frac{2}{5}$ de metal prețios :

$$4 - 0,32 = 3,68 \text{ kg.}$$

Titlul acestui aliaj este

$$3,2 : 3,68 = 0,869.$$

Toate clasele. *Exerc. 257.* Să se arate că produsul numerelor :

$$2000! \text{ și } 2000! \pm 1$$

nu poate să fie divizibil cu 4001.

I. L.

Se știe din „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS (pag. 438) și „*Exercices d'Arithmétique*“ par FITZ-PATRICK (pag. 433) că dacă $p = 4 \cdot q + 1$ este un număr prim, atunci :

$$\left[\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 + 1 = Mp.$$

În cazul de mai sus avem produsul :

$$\begin{aligned} P &= (2000!)^2 \pm 2000! \\ &= (2000!)^2 + 1 \pm (2000! \mp 1) \\ &= M \cdot 4001 \pm (2000! \mp 1). \end{aligned}$$

Dar cum :

$$\begin{aligned} (2000!)^2 + 1 &= (2000!)^2 - 1 + 2 \\ &= (2000! - 1)(2000! + 1) + 2 \\ &= M \cdot 4001, \end{aligned}$$

urmează că unul din numerele :

$$(2000! - 1) \text{ sau } (2000! + 1)$$

divizat cu numărul 4001 dă restul 2. Aceasta înseamnă că :

$$P = M \cdot 4001 \mp 2.$$

Prin urmare produsul celor două numere date, nu este divizibil cu 4001.

I. L.

T. C. 258. Să se arate cu ajutorul rădăcinilor primitive că, numărul $(7^5 + 1)$ se împarte exact cu 11.

I. L.

Știm că:

Dacă a este o rădăcină primitivă a numărului prim p , atunci :

$$a^{\frac{p-1}{2}} + 1 = Mp.$$

(„Exercices d'Arithmétique“ par FITZ-PATRICK, question 456, pag. 464).

În cazul nostru avem :

$$7^5 + 1 = 7^{\frac{11-1}{2}} + 1 = M11.$$

Prin urmare 11 fiind prim, trebuie ca 7 să fie o rădăcină primitivă a lui.

Pentru aceasta vom verifica dacă este rădăcină primitivă, adică avem :

Puteri	7	7 ²	7 ³	7 ⁴	7 ⁵	7 ⁶	7 ⁷	7 ⁸	7 ⁹	7 ¹⁰
Resturi divizând cu 11	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1*

Resturile obținându-se ușor căci :

„Restul diviziunii lui A^{n+1} prin B este restul diviziunii lui A^n prin B înmulțit cu A “.

Așa dar 7 fiind o rădăcină primitivă a lui 11, numărul $(7^5 + 1)$ este divizibil cu 11.

I. L.

Până la 1 Septembrie 1941 s'au primit soluții bune dela *) :

Liceul de fete „Iulia Hasdeu“, București.

Clasa VII-a : STOIA N. SILVIA (VII : 569, 70, 6*, 8).

Liceul „Carmen Sylva“, București.

Clasa VI-a : EPURE C. MARILENA (VI : 683, 4, 5, 9).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Școala Centrală de fete, București.

Clasa III-a : MIUȚĂ S. FLORICA (III : 165).

Liceul „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa VI-a : MUNTEANU I. DORINA (VI : 651*).

Liceul de fete Turnu-Severin.

Clasa VII-a : CIOC D. VALENTINA (VII : 570).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa IV-a : TEMELCU H. N. (IV : 560, 1*).

Clasa V-a : TIMOTIN A. A. (V : 682, E. G. : 373).

Clasa VI-a : PRIȘCU R. A. (VI : 560).

Clasa VII-a : GHIMUȘ A. D. (VII : 570).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa V-a : BÂLCU L. N. (V : 666), HARBUNIEV P. N. (V : 665, 617).

Clasa VI-a : STOIANOVICI V. Ș. (VI : 79, 80, 685).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VI-a : ARON I. G. (VI : 653, 8).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa VII-a : PREDOLEANU E. N. (VII : 561, 2, 3, 7).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa VII-a : MARINESCU A. I. V. (VII : 591, 605, 7, E. G. : 374, 82).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa VI-a : CONSTANTINESCU I. E. (VI : 663, 4, 6, 7, 8, 9, 70, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 82, 3, 4, 5, 6, 7, 90, VIII : 477, 8, E. G. : 364, 5, 6, 73, 6, 7, 8).

Clasa VIII-a : ANGHEL T. (VIII : 456, 7, 61, 5).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa III-a : BARBAIANI M. (III : 174, 7, V : 685, 6).

Clasa VI-a : DROCAN S. E. (VI : 651*).

Clasa VIII-a : BARBAIANI A. I. (VIII : 466, 78, E. G. : 374).

Institutul „Schewitz-Thierrin“, București.

Clasa VIII-a : MĂRGĂRIT I. N. (VIII : 466, 7, 78, 9, E. G. : 374).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa VI-a: NISTOR I. I. (VI: 650).

Liceul „Știrbei-Vodă“, Călărași.

Clasa VI-a: CULEA I. D. (VI: 652).

Liceul Militar Câmpulung, Muscel.

Clasa VII-a: BĂRBUȚ T. (VIII: 478).

Clasa VIII-a: DUMITRESCU G. (VIII: 478), HOLCA L. R. (VIII: 478), GIUGLAN D. (VIII: 478), NISTOR I. I. (VIII: 478), POPESCU-GOACA I. (VIII: 478), RAICU S. V. (VIII: 478).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa VII-a: DOBRESCU T. G. (VII: 560), MUSCELEANU V. (VII: 585, 7, 91, 8, E. G.: 356).

Liceul Militar Craiova.

Clasa IV-a: CÂRSTEA M. (IV: 581, 2, 3, 4, 5, 8), DEMETRESCU M. M. (IV: 581), DODIU Ș. (IV: 581, 4, 5, 8), GHINȚEI A. G. (IV: 588), GOGOȘE P. S. (IV: 588), HUZUREANU G. M. (IV: 588), LANG N. (IV: 588), NICOLICIOIU D. (IV: 581, 8), POPA N. (IV: 581, 2, 4, 5, 8), RUSU T. N. (IV: 588), STARICU N. M. (IV: 588), ULMET V. V. (IV: 581, 4, 6, 8).

Clasa V-a: ANDREI A. (E. G.: 374), CIOROIANU M. C. (V: 685).

Clasa VII-a: DIACON A. (VII: 591), ANTONESCU D. I. (VII: 587, 98), MATEESCU A. (E. G.: 374), PAȘOI N. D. (VII: 591, E. G.: 382), POPESCU D. N. (E. G.: 382), ZAHARIA G. S. (E. G.: 382).

Liceul Internat Iași.

Clasa V-a: DOLINESCU C. M. (V: 685).

Clasa VII-a: MANOLACHE C. M. (VII: 604, 5).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: BENEȘCU I. N. (III: 168).

Clasa IV-a: BULIBAȘA G. M. (IV: 582, 8), EDU C. E. (IV: 581, 2, 3, 8), MIHAILESCU Ș. (IV: 581), ROȘU N. (IV: 582, 3, 5, 6, 8).

Clasa VI-a: BĂDULESCU D. M. (VI: 673, 7), CĂRUNTU D. F. (VI: 673, 7), COZLOSCHI V. M. (VI: 650, 73), DRĂGHICI G. M. VI: 673, 7), LĂZĂRESCU I. (VI: 673, 7), LUPĂȘCU I. S. (VI: 673), MARINESCU M. I. (VI: 673, 7), MATEESCU M. G. (VI: 673), MILEA C. C. (VI: 673), NICOLAU T. (VI: 673, 7), PALADE M. (VI: 673, 7), PUCHIU T. G. (VI: 677), TURCULEȚ B. T. (VI: 673).

Clasa VII-a: CIUHUREANU N. P. (VII: 577, 85, 6, 7, 93, 8, E. G.: 375), DIMITRIE C. R. (E. G.: 375, 81), DRĂGHICESCU P. P. (VII: 587, 91, 2, 3, E. G.: 372, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 80, 1), IACOMI M. (VII: 561).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploești.

Clasa VI-a: MOTOIU S. C. (VI: 673).

Clasa VIII-a: PALANCĂ C. C. (VIII: 457, 63, 4, 5).

Colegiul Național „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa IV-a: PÎTIȘ N. (IV: 585, 8), RĂDULESCU N. C. (IV: 588), VÂRTE-
JEANU G. M. (IV: 588).

Clasa VI-a: GHEORGHIU M. (VI: 673), STOIANOVICI I. Ș. (VI: 678, 80, 3, 5).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa IV-a: NIMARĂ I. V. (IV: 569, 89).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa VII-a: BARBU S. V. (VII: 5, 76).

Liceul Militar Timișoara.

Clasa IV-a: SĂVICA A. V. (IV: 551).

Clasa V-a: VASILIU G. D. (V: 683, 84, 98, 704, VI: 667, E. G.: 374, 82).

Clasa VI-a: APOSTOLESCU R. (VI: 673, 4).

Clasa VII-a: COMAN I. L. (VII: 604, 5), RADU I. (VII: 603, 4), UNGU-
REANU P. I. (VII: 574, 600).

Clasa VIII-a: COSTIN ALEXE (VIII: 483).

EXERCITII PROPUSE

**Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc
până la 1 Ianuarie 1942**

Clasa III-a. Exerc. 183. Fie trapezul ABCD; $\overline{AD}$ baza mică
 $\overline{AA'}$ și $\overline{DD'}$ înălțimea trapezului.

Să se arate că:

1. Dacă

$$\sphericalangle CAA' = \sphericalangle BDD'$$

prin cele patru vârfuri ale trapezului trece un cerc.

2. În acest caz, M și N fiind punctele unde $\overline{AA'}$ și $\overline{DD'}$
taie respectiv pe BD și CA; să se arate că AMND este un
dreptunghi.

O. N. Ț.

III. 184. Fie un cerc O , o coardă $\overline{AB}$ și o dreaptă D perpendiculară pe AB , care întâlnește în M , N , P respectiv coarda AB , raza OB și prelungirea razei AO .

Să se determine poziția dreptei D astfel ca $\overline{MN}$ să fie o treime din $\overline{MP}$.

O. N. Ț.

III. 185. O arenă circulară are raza de 8 m. De câte ori crește raza, dacă suprafața se triplează? Cu cât crește suprafața, dacă raza se triplează?

C. I. B.

Clasa IV-a. Exerc. 600. Fie cercul O de rază R , coarda $\overline{AB}$ egală cu raza cercului O și C punctul unde apotema OD prelungită taie arcul mai mic, AB , întins de coarda AB .

Să se construiască patratul $EFGH$ înscris în triunghiul ACB și să se calculeze latura lui.

Să se calculeze asemenea distanța centrului I al patratului construit la centrul O al cercului dat.

O. N. Ț.

IV. 601. Fie cercul O de rază R ; $\overline{AB}$ o coardă egală cu R ; I mijlocul coardei $\overline{AB}$; M și N extremitățile diametrului $\overline{OI}$ (M de aceeași parte cu I față cu O); L mijlocul razei $\overline{OM}$; $\overline{CD}$ coarda cercului paralelă cu AB și trecând prin L ; P și R punctele unde OA și OB taie pe CD , iar A' și B' punctele unde OA și OB taie tangenta în M la cercul O .

a) Să se arate, că :

1. $\overline{CP} = \overline{PR} = \overline{RD}$.

2. CA' și DB' sunt respectiv paralele cu OB și OA .

b) Să se calculeze ariile și perimetrele trapezelor isoscele $A'PRB'$; $ACDB$; $A'CDB'$.

c) Să se calculeze distanța, față cu centrul O , la care se întâlnesc dreptele CA' , DB' .

O. N. Ț.

IV. 602. O placă triunghiulară ABC are laturile

$$\overline{AB} = 5 \frac{3}{4} m, \quad \overline{AC} = 7 \frac{1}{2} m.$$

și distanța dela vârful B la piciorul D al perpendicularei dusă din A pe BC, de $3 \frac{1}{4} m$.

Să se calculeze lungimea medianelor triunghiului.

C. I. B.

IV. 603. Să se descompună în produs de factori expresiunea:

$$(x + y - z)^3 + (y + z - x)^3 - 8y^3.$$

C. I. B.

Clasa V-a. Exerc. 705. Catetele AB, AC ale unui triunghi dreptunghic sunt tăiate în D și E de o paralelă la ipotenuză. Se completează dreptunghiul AEGB. Să se arate că distanțele lui A și G respectiv la DE și CB sunt egale.

GH. B.

V. 706. Să se determine u și v astfel ca să avem:

$$(x_1^2 + ay_1^2)(x_2^2 + ay_2^2)(x_3^2 + ay_3^2) \equiv u^2 + av^2,$$

$a, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ sunt numere date.

Asemenea, să se determine u și v astfel ca să avem:

$$(x_1^2 + ay_1^2)(x_2^2 + ay_2^2)(x_3^2 + ay_3^2)(x_4^2 + ay_4^2) \equiv u^2 + av^2.$$

O. N. Ț.

V. 707. Fie $\overline{AB}$ diametrul unei sfere și M un punct pe el. Se consideră sferile de diametri $\overline{AM}$, $\overline{BM}$. Intre aceste trei sfere este cuprins un volum V.

Notăm cu V_1 volumul unui con cu raza bazei $\overline{AM}$ și înălțimea lui cât raza sferei mari, apoi cu V_2 volumul unui con cu raza bazei $\overline{BM}$ și înălțimea lui cât raza sferei mari.

Să se demonstreze relația:

$$\left(\frac{V}{3}\right)^2 = V_1 \cdot V_2.$$

GH. D.

V. 708. Să se împartă un cerc O de rază R în nouă părți egale ($\text{arc}A_1A_2 = \text{arc}A_2A_3 = \text{arc}A_3A_4 = \dots = \text{arc}A_8A_9 = \text{arc}A_9A_1$). Dacă M este un punct oarecare al cercului, să se arată că:

$$\overline{MA_1} + \overline{MA_3} + \overline{MA_5} + \overline{MA_7} + \overline{MA_9} = \overline{MA_2} + \overline{MA_4} + \overline{MA_6} + \overline{MA_8}.$$

O. N. Ț.

V. 709. Să se verifice identitatea:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (b+\sqrt{2})^3 + (a+\sqrt{2})^3 - 3(a+b)(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2}) \\ \equiv 2(a+b+\sqrt{2})[a^2+b^2-ab+\sqrt{2}(\sqrt{2}-a-b)]. \end{aligned}$$

C. I. B.

Clasa VI-a. Exerc. 693. Se dă un cerc de rază R . Circumscriem trapezul isoscel $ABCD$ în care $C = 45^\circ$.

Să se afle aria $ABCD$.

GH. D.

VI. 694. Fie $ABCD$ un patrulater ortodiagonal (diagonalele perpendiculare) și O punctul de intersecție al diagonalelor.

În figură, OM , ON , OP , OQ sunt respectiv bisectoarele unghiurilor AOB , BOC , COD , DOA .

Să se demonstreze relațiile:

1.
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$
2.
$$2(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$$
3.
$$\frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2}{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2}{\overline{MN}^2 + \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QM}^2}.$$

GH. D.

VI. 695. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = a \quad ; \quad x+y = b.$$

GH. D.

VI. 696. Se dă ecuația

$$4x^2 + 2(m - 5)x + m^2 + 3 = 0.$$

1. Să se cerceteze natura rădăcinilor acestei ecuații.
2. Să se determine m astfel ca ecuația să admită rădăcina

$$\frac{3(m^2 + 1)}{10}.$$

G. D. S.

VI. 697. Intr'un cerc dat se duc două coarde: $\overline{AB}$ fixă și $\overline{MN}$ variabilă ca poziție, dar de lungime constantă.

Se notează cu P și Q intersecțiile (AM, BN) și (AN, BM) .

1. Să se găsească locul geometric al punctelor P și Q .
2. În ce cazuri patrulaterul $MPNQ$ este inscriptibil? Discuție.
3. În cazurile posibile, să se afle locul centrului cercului $MPNQ$ și să se arate că dreapta PQ are o direcție fixă.

G. D. S.

VI. 698. Să se rezolve ecuația

$$x^4 + px^3 + qx^2 + prx + r^2 = 0.$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 613. Să se facă calculabilă prin logaritmi suma

$$\sum \cos A (\cos^2 C - \cos^2 B),$$

în care A, B, C sunt unghiurile unui triunghi.

GH. B.

VII. 614. Fie $VABCD$ o piramidă regulată, având vârful V și ca bază patrulaterul $ABCD$.

Prin muchia BC ducem un plan P , care taie fețele VAB , VAD , VCD după dreptele BM , MN , NC .

Planul P face cu planul bazei un unghi φ , iar planul VAB face cu planul bazei un unghi α . Notăm $\overline{AB} = a$.

Se cere, să se demonstreze că patrulaterul $BMNC$ este *trapez isoscel* și să se exprime suprafața sa în funcție de a, φ, α .

GH. D.

VII. 615. Fie xy linia de intersecție a planelor P, Q . Notăm cu α unghiul plan al diedrului (P, Q) .

Un dreptunghi $BCC'B'$, așezat în planul Q , are latura BC așezată pe xy , iar triunghiul isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$) este așezat în planul P .

Știind că $\overline{BC} = a$, $\overline{BB'} = b$, $\overline{AB} = c$, se cere să se calculeze unghiul $ACC' = \varphi$.

GH. D.

VII. 616. Să se verifice identitatea:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5} - \alpha\right) = \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)$$

și apoi să se stabilească.

O. N. Ț.

VII. 617. Să se stabilească identitatea

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7} - \alpha\right) \\ = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7} - \alpha\right), \end{aligned}$$

unde α este un unghi mai mic decât $\frac{\pi}{7}$ și să se arate că ea subsistă pentru α oarecare.

O. N. Ț.

VII. 618. Să se raționalizeze numitorul fracției

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}.$$

C. I. B.

VII. 619. Să se calculeze:

$$\left(\frac{a+b\sqrt{c}}{a-b\sqrt{c}} + \frac{b+a\sqrt{c}}{b-a\sqrt{c}} \right) : \left(\frac{a+c\sqrt{b}}{a-b\sqrt{c}} + \frac{c+a\sqrt{b}}{b-a\sqrt{c}} \right),$$

apoi înlocuind

$$c = a^2 + b^2 - 1,$$

să se descompună rezultatul în produs de factori.

C. I. B.

Clasa VIII-a. Exerc. 494. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D = \begin{vmatrix} ab(x-a) & x^2(y-b) + ab(x-a) & 2xy - bx - ab \\ b(x-a) & \frac{xy - ab}{2} & y - b \\ 2xy - ay - ab & 2xy - bx - ay & y - b \end{vmatrix}.$$

G. D. S.

VIII. 495. 1°. Să se determine a , astfel ca sistemul

$$\begin{cases} 3(a+2)^2 y + (a+2)^2 z = 1 \\ 6(a-1)(a+2)y + (a-1)^2 z = 4 \\ a(a+2)y + 4z = 1 \end{cases}$$

să fie compatibil.

2°. Din sistemul format de prima și a doua ecuație să se calculeze y și z în funcție de a .

3°. Înlocuind pe a cu x , avem două funcții

$$y = f(x) \quad \text{și} \quad z = g(x).$$

Să se reprezinte grafic $y = f(x)$.

4°. Presupunând ambele funcții raportate la același sistem de axe de coordonate, să se determine punctele de pe cele două curbe, așezate pe aceeași paralelă la OY, care au tangente la curbe paralele.

G. D. S.

VIII. 496. Un grup de bărbați, femei și copii mănâncă la un restaurant cu următoarele prețuri: 45 lei un bărbat, 30 lei o femeie și 10 lei un copil.

Același grup de persoane mănâncă la al doilea restaurant, plătind 70 lei un bărbat, 50 lei o femeie și 10 lei un copil.

Tot aceleași persoane mănâncă la al treilea restaurant cu prețurile următoare: 65 lei un bărbat, 40 lei o femeie și 20 lei un copil.

Știind că la fiecare restaurant suma plătită pentru bărbați este egală cu aceea plătită pentru femei și copii la un loc, se cere să se afle numărul bărbaților, al femeilor și al copiilor, știind că numărul copiilor este mai mic decât 6.

G_H. D.

VIII. 497. Să se stabilească relația:

$$\frac{C_{2n}^{2p}}{C_n^p} = \frac{A_{2n}^n}{A_{2p}^p A_{2(n-p)}^{n-p}}.$$

C. I. B.

VIII. 498. Dacă

$$\frac{C_n^i}{C_n^{i+1}} - \frac{C_n^{i+1}}{C_n^{i+2}} = -\frac{1}{3}.$$

Numărul $N = 4n - i + 3$ este un patrat perfect.

C. I. B.

VIII. 499. Se dă un triunghi ABC. Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului. A'' punctul care împarte segmentul A'A în raportul $\frac{3}{4}$. Dreptele BA'', CA'' întâlnesc dreptele AC, AB în punctele A_c, A_b.

1. Să se determine rapoartele în care aceste puncte împart laturile respective.

2. B_c, B_a, C_a, C_b fiind punctele obținute analog, plecând dela medianele B'B, C'C, să se calculeze

$$\frac{\overline{A_b A}}{\overline{A_b B}} \cdot \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a B}} \cdot \frac{\overline{B_c B}}{\overline{B_c C}} \cdot \frac{\overline{C_b B}}{\overline{C_b C}} \cdot \frac{\overline{A_c C}}{\overline{A_c A}} \cdot \frac{\overline{C_a C}}{\overline{C_a A}}.$$

C. I. B.

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 2

1 NOEMVRIE 1941

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803



GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL VIII. No. 2

1 NOEMVRIE 1941

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE” DIN 1942

1. Societatea *Gazeta Matematică*, în Adunarea generală dela 25 Septembrie a. c., a hotărît ținerea concursului tradițional de matematici în anul 1942, între elevii liceelor civile și militare din întreaga țară.

Totodată se va ține un concurs și între studenții anului I ai Politehnicei din București.

Concursul va avea loc după sărbătorile Paștelui, înainte de reînceperea cursurilor. Dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidații, el se va ține în București, unde se va da examen scris și oral; în caz contrar se va ține în diferite centre din țară, într-o Duminică din luna Mai, dându-se numai examen scris.

Hotărîrea în această privință se va publica în numărul din Februarie 1942.

2. Elevii, cari doresc să se înscrie la concurs, sunt obligați să candideze la *două materii de matematici dintre acele menționate aici pentru clasa în care urmează*:

Clasa IV-a: Algebra, geometria în spațiu;

Clasa V-a: Aritmetica raționată, algebra, geometria plană;

Clasa VI-a: Teoria numerelor, algebra, trigonometria, geometria în spațiu;

Clasa VII-a: Algebra, geometria descriptivă și proiectivă;

Clasa VIII-a: Mecanica, algebra, geometria analitică.

3. Societatea *Gazeta Matematică*, socotind că o temeinică pătrundere a aritmeticei, teoriei numerelor și mecanicei este absolut

necesară unui bun absolvent de liceu, deci unui candidat la concurs, hotărăște, că pentru elevii claselor V, VI, VIII, una dintre cele două materii de concurs să fie *obligatorie* și anume:

Aritmetica raționată, pentru candidații clasei V-a;

Teoria numerelor, pentru candidații clasei VI-a;

Mecanica, pentru candidații clasei VIII-a.

4. Candidații vor da: a) o probă scrisă teoretică la una dintre materiile pentru care se prezintă la concurs, b) o probă scrisă practică la cealaltă materie, c) un examen oral din ambele materii, în cazul ținerii concursului în București.

Sub niciun motiv nu se acordă candidaților scuze de nepregătirea unora dintre capitolele trecute în programul clasei lor, pentru obiectele la care trece concursul.

5. *Înscrierea la concurs* se face numai prin cerere individuală, scrisă personal de candidat și se va trimite în plic recomandat, cel mai târziu până la 1 Ianuarie 1942, pe adresa Societății *Gazeta Matematică*. Calea Griviței, 158. București 2.

Nu se primesc cereri trimise de părinți, corespondenți, profesori sau școli, fiecare candidat fiind obligat a-și face singur cererea.

6. Pentru a fi luată în considerare cererea de înscriere la concurs, candidatul trebuie să răspundă pe puncte, în ordinea de mai jos, la următoarele date:

a) Numele (de familie) și prenumele.

b) Școala și clasa în care urmează candidatul. (Cei pregătiți în particular vor arăta școala la care au urmat în anul precedent sau la care au depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă).

c) Adresa personală:

— în timpul școlii;

— în timpul vacanței de Paște.

d) Dacă dispune de mijloace de a veni în București, dacă are unde fi găzduit și întreținut în timpul concursului sau dacă unul dintre aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică*.

(Cel care are nevoie de bani pentru drum, va arăta gara de unde va lua trenul pentru a veni în București, precum și gara la care se înapoiază după concurs).

VIII. 500. Să se descompună în produs de factori expresiunea :

$$(x + y - z - 1)^3 + (y + z + 1 - x)^3 + (z + 1 + x - y)^3.$$

C. I. B.

VIII. 501. Se dă triunghiul ABC: A (a , o), B ($a + b$, o), C (o , b).

Să se afle raportul în care piciorul înălțimii vârfului B împarte segmentul AC, coordonatele conjugatului său armonic și ale simetricului acestuia față cu mijlocul laturii AC.

C. I. B.

Exerciții Generale. E. G. 391. Știind că

$$1124^2 = 1263376$$

să se deducă patratele numerelor 1624, 2124, 2624... unul din altul numai prin adunări, fără a face nicio înmulțire.

GH. B.

E. G. 392. Câte secunde a împlinit G. M. (Gazeta Matematică), dela apariția ei¹⁾, la 15 Septemvrie 1941 ?

I. L.

E. G. 393. Dacă am pune câte un număr din *Gazeta Matematică*, dela apariție și până la 15 Septemvrie 1941, unul lângă altul, sau cap la cap, ce lungime totală s'ar realiza ? Dar în suprafață câți metri patrați ar fi ?

Se va ție seamă că în unii ani au apărut unele numere duble sau triple, astfel avem respectiv în anii: în XXII numai 9 numere, în XXIII numai 7 numere, în XXIV numai 4 numere, în XXV numai 6 numere, în XXVI numai 11 numere.

I. L.

1) *Gazeta Matematică* a apărut la 15 Septemvrie 1895.

E. G. 394. Dacă am scrie cu litere toate numerele dela 1 la 1.000.000 exclusiv, de câte ori am scrie pe a și pe z ?

I. L.

E. G. 395. Câte numere pot fi scrise având cifrele în progresie aritmetică cu rația 2 ? Dar cu rația 3 ?

I. L.

E. G. 396. Un număr are 23 de cifre. Ce reprezintă cifra dela stânga *pentru noi, pentru Germani* și după GELIN ?

I. L.

E. G. 397. Câte numere de douăzeci de cifre sunt în total ? Câte cifre ne-ar trebui să le scriem pe toate ?

I. L.

E. G. 398. Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$x^2 + y^2 = xyz.$$

GH. B.

E. G. 399. Să se găsească numărul de patru cifre $abcd$, știind că :

$$(20a - b)(20c - d) = 858.$$

GH. B.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții” al *Gazetei Matematice*, pe adresa Căpitan Ing C. D. Ionescu-Țiu, Casa *Gazeta Matematică*, Calea Griviței 158, București 2.

drepturile de reproducere rezervate Societății „*Gazeta Matematică*”.

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „*Gazeta Matematică*”.

În Biblioteca „*Gazetei Matematice*” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

- III. N. Abramescu, Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a Lei 120
- IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, Vocabular Matematic Lei 20
- X. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie Lei 150
- XI. *Gazeta Matematică* 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) Lei 200
 - } pentru particulari Lei 200
 - } pentru abonații G. M. și S. G. M. Lei 150
- XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 95
- XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raționată Lei 190
- XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 125
- XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită Lei 120
- XVI. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de N. G. Botea Lei 140
- XVII. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

- 1. Elementele lui Euclid. (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 160
- Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) Lei 80

„*Gazeta Matematică*” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa *Gazeta Matematică* — Calea Griviței No. 158. — București 2.
(Telefon : 3-9803).

e) Materia la care se înscrie să treacă proba scrisă teoretică și materia la care se înscrie să treacă proba scrisă practică.

f) Activitatea depusă la *Gazeta Matematică* și *Suplimentul cu Exerciții al Gazetei Matematice*, arătând numerele de ordine ale problemelor și ale exercițiilor rezolvate și publicate sau menționate, precum și activitatea la alte reviste de matematici din țară sau din străinătate.

6. Candidații înscriși la concurs, cari din diferite motive nu mai pot sau nu mai vor să se prezinte, sunt obligați să anunțe din timp Societatea printr'o scrisoare.

Părăsirea sălilor de concurs este interzisă înainte de predarea lucrărilor scrise.

În numărul 6 din Februarie 1942 al *Gazetei Matematice*, se va publica felul cum se va ține concursul, localitatea, orele de prezentare, precum și numele candidaților admiși să ia parte la concurs.

Numărul celor admiși la concurs se va hotărî ținând seama de sacrificiile materiale ce se vor cere Societății *Gazeta Matematică* pentru transportul, găzduirea și întreținerea candidaților și de pregătirea pe care aceștia o vor arăta și dovedi în cererile ce vor face.

7. Candidații reușiți la concurs vor primi diplome, recompense, premii sau mențiuni.

Primul reușit dintre toți candidații liceelor va primi premiul „LT.-COL. G. TĂNĂSESCU“, în cărți, așa cum se arată în numărul 1 din acest an, în articolul: *Premiile, bursele și publicațiile Societății „Gazeta Matematică“*.

Primul reușit dintre studenții anului I al Politehnicei din București va primi premiul „ANGHEL SALIGNY“, de 1000 lei, oferit de un membru al Societății noastre.

Comisia examinatoare se va compune din membri ai Societății *Gazeta Matematică*, cari nu au rude sau elevi printre candidați.

8. Programă analitică a concursului.

Clasa IV-a: 1. *Algebra*. Toată materia prevăzută în programă analitică. În plus: Rezolvarea ecuațiilor de gradul I cu una și două necunoscute, cu coeficienți literali.

2. *Geometria în spațiu*. Toată materia prevăzută în programă analitică.

Clasa V-a: 1. *Aritmetica raționată*. (obiect obligator). Operațiile aritmetice. Divizori. Numere prime. Cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun. Frații ordinare, zecimale. Rădăcini pătrate. Rapoarte. Proportii. Regula de trei. Dobânzi simple. Sconturi. Asociații. Amestecuri.

2. *Algebra*. Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

La radicali se va face raționalizarea numitorilor cari cuprind radicali de ordinul al doilea și superior.

La sistemele de ecuații de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare. Sisteme reductibile la gradul I și II.

Transformarea expresiilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

3. *Geometria plană*. Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Teorema lui MENELAUS și CEVA și reciprocele lor.

Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulatere inscriptibile.

Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte. Axă și centru radical.

Relația metrică a lui STEWART. Aplicații.

Clasa VI-a: 1. *Teoria numerelor* (obiect obligator).

Divizori; numărul, suma și produsul divizorilor. Numere amiabile.

Indicatori. Teoremele lui FERMAT, EULER, WILSON.

2. *Algebra*. Toată materia prevăzută în programa analitică.

3. *Trigonometria*. Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Aria unui triunghi în funcție de elementele lui.

Razele cercurilor: circumscris, înscris, exînscrie.

Identități, ecuații și sisteme trigonometrice.

Problema hărții.

4. *Geometria în spațiu*. Toată materia prevăzută în programa analitică. In plus:

Unghiuri triedre. Cazurile de egalitate ale triunghiurilor sferice și aria triunghiului sferic. Volumul produs de un sector poligonal plan, care se rotește în jurul unei axe.

Volumul segmentului sferic (mărginit de zonă sau calotă).

Clasa VII-a: 1. *Algebra*. Toată materia prevăzută în programa analitică. În plus:

Serii cu termeni pozitivi, seria numărului e . Principalele criterii de convergență. Logaritmi neperieni.

Derivata funcției logaritmice și exponențiale.

Nedeterminări. Regula lui HÔSPITAL.

2. *Geometria descriptivă și proiectivă*. Toată materia prevăzută în programa analitică. În plus:

Metode: Schimbarea planelor de proiecție, rotația și rabaterea.

Inversiunea. Diviziuni și fascicule anarmonice și armonice. Pol și polară în raport cu un unghi și în raport cu un cerc. Polare reciproce. Teoremele lui PASCAL și BRIANCHON. Patrulatere complete.

Clasa VIII-a: 1. *Mecanica* (obiect obligator). Toată materia prevăzută în programa analitică pentru clasa VIII-a și Cinematica prevăzută pentru clasa VII-a.

2. *Geometria analitică*. Toată materia prevăzută în programa analitică. În plus:

Pol și polară.

Studiul geometric elementar al conicelor.

3. *Algebra*. Toată materia prevăzută în programa analitică. În plus:

Cantități complexe. Teorema lui MOIVRE. Ecuatii binoame.

Anul I al Politehniceii din București.

Candidații vor fi examinați din materia predată până la vacanța Paștelui la două din materiile:

Algebră și Analiză matematică, Geometrie analitică, Mecanică.

*

Orice candidat trebuie să cunoască toată materia respectivă a claselor precedente, cu adăgirile prevăzute în prezenta programă.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

EXERCIȚII REZOLVATE

Toate clasele. *T. C. 261. Dacă un număr N are n factori primi și 2^n divizori, care este expresia indicatorului lui?*

I. L.

Numărul N nu poate fi decât de forma :

$$N = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$$

exponenții fiind 1, căci numai în acest caz numărul divizorilor este 2^n . Atunci indicatorul va fi :

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= N \cdot \frac{(a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) \dots (a_n - 1)}{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} \\ &= (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) \dots (a_n - 1). \end{aligned}$$

Prin urmare, indicatorul va fi egal cu produsul factorilor micșorați cu unitatea.

I. L.

Exerciții Generale. *E. G. 359. Dacă avem :*

$$i_1 = \sqrt{-1} ; i_2 = \sqrt{-i_1} ; \dots i_n = \sqrt{-i_{n-1}}$$

să se calculeze produsul :

$$P_n = i_1 \cdot i_2 \dots i_n.$$

I. L.

Avem :

$$i_1 = \sqrt{-1} = i$$

$$i_2 = \sqrt{-i_1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{i} = i \cdot \sqrt{i} = i^{\frac{3}{2}} = i^{\frac{2^1-1}{2}}$$

$$i_3 = \text{idem} = i^{\frac{2^2-1}{2}}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$i_n = i^{\frac{2^n-1}{2}}.$$

Atunci $P = i^s$, unde:

$$\begin{aligned} s &= \frac{2^1-1}{2^0} + \frac{2^2-1}{2^1} + \dots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \\ &= \underbrace{\frac{2}{1} + \frac{2}{1} + \dots + \frac{2}{1}}_n - \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right] \\ &= 2(n-1) + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Deci:

$$\begin{aligned} P &= i^{2(n-1)} \times i^{\frac{1}{2^{n-1}}} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot i^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \text{imaginar}. \end{aligned}$$

Soluția a fost redactată după D-l DINCĂ VĂDUVA.

În *G. M. XXIX*, 133 și 253 se arată expresiunea lui i_n .

I. L.

Până la 10 Octomvrie s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în Nr. 1, dela *):

Liceul „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa III-a: ALBU D. AURELIA (III: 173, 6, 81).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa III-a: DUMITRESCU F. S. (III: 183, 4, 5, IV: 603).

Clasa V-a: HARBUNIEV P. V. (V: 676, 7, VI: 683, 4).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa V-a: TIMOTIU A. A. (V: 678).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VI-a: ARON I. G. (VI: 660, 3).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa VIII-a: ANGHEL T. (VIII: 463).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa III-a: BARBAIANI A. M. (III: 168, 9, 70, 2, V: 682).

Liceul „Marele Voevod Mihai“, București.

Clasa VI-a: BRATU I. E. (VI: 666).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa VIII-a: VERNESCU V. N. (VIII: 501).

Liceul „Dr. Ion Meșotă“, Brașov.

Clasa VI-a: FLORICA STELIAN (VI: 684).

Liceul Bacău.

Clasa V-a: FĂNARU N. D. (V: 695).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Câmpulung-Muscel.

Clasa VII-a: BĂRBUȚ TOMA (VII: 589).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a: CÂRSTEA D. MARIN (IV: 572, 3, 4, 580), DEDIU M. ȘTEFAN (IV: 580), GHINȚEI GH. (IV: 580).

Clasa VII-a: DIACONU ALEX. (VII: 579, 82, E. G.: 379, 82), NEGRILĂ T. (VII: 579, E. G.: 379).

Liceul Internat Iași.

Clasa VII-a: MANOLACHE C. MIRCEA (VII: 581).

Liceul Militar, Iași.

Clasa IV-a: BOGZA I. NEAGOE (IV: 572), BURLIBAȘA MIRCEA (VI: 581), EDU C. EUGEN (IV: 572, 580), MIHĂILESCU I. ȘTEFAN (IV: 580), ROȘU NIC. (572, 580, 5S1), SOLESCU MARCEL (IV: 572), ȘOVA MIRCEA (IV: 580).

Clasa V-a: CECALĂ IOAN (V: 677), OANĂ TOMA (V: 645).

Clasa VII-a: DRĂGHICESCU P. PAUL (VII: 582, 89, 90), IACOMI D. MIRCEA (VII: 589), MANOLIU VASILE (VII: 589), RĂDULESCU TH. ION (VII: 589).

Liceul Militar Timișoara.

Clasa IV-a: VINEȘ C. (IV: 574).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa V-a: ȘERBAN M. C. (V: 705, 9).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa V-a: BIRIȘTEICĂ P. P. (V: 705).

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1942

Clasa III-a. Exerc. 186. Fie cercul O de rază oarecare și diametrul său MOA_6 . Împărțim unul din semicercuri în 11 părți egale și însemnăm plecând din M primul punct de divizie cu A_1 , al treilea cu A_2 , al cincilea cu A_3 , al șaptelea cu A_4 , al nouălea cu A_5 , al unsprezecelea punct fiind A_6 .

Fie încă N, P, R respectiv intersecțiile perechilor de drepte:

$$(MA_2, OA_1), (MA_3, OA_2), (MA_4, OA_3).$$

Să se arate că avem:

$$\overline{NA_2} = \overline{PA_3} = \overline{OR}.$$

O. N. Ț.

III. 187. Într'un cerc (O) construim doi diametri $\overline{AC}$ și $\overline{A'C'}$ formând unghiul $A'OA$ de 45° ; apoi construim o coardă AB , egală cu raza cercului (O) și exterioară unghiului $A'OA$, și formăm dreptunghiul $ABCD$ (înscris în cercul O). Construim asemenea o coardă $A'B'$, exterioară unghiului AOA' , egală cu $\overline{BC}$ și apoi dreptunghiul $A'B'C'D'$.

a) Să se găsească măsura unghiurilor pe care le face o diagonală a unui dreptunghi cu laturile celuilalt.

b) Însemnând cu E' punctul unde prelungirea diagonalei AC taie prelungirea laturii $C'D'$, să se arate că $\overline{A'E'}$ este egal cu latura patrulaterului înscris în cercul (O).

O. N. Ț.

III. 188. Se dau numerele:

$$5\frac{2}{3}, \frac{1}{17}, 3$$

Să se afle al 4-lea proporțional combinându-le în toate modurile posibile. Să se afle apoi al 4-lea proporțional al rezultatelor.

C. I. B.

Clasa IV-a. Exerc. 604. Pe o axă $X'OX$, pe care semi-dreapta OX are sensul pozitiv al axei, să se reprezinte exact numerele

$$+3 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \quad \text{și} \quad +4 - 3\sqrt{2} + \sqrt{3},$$

unitatea de măsură fiind luată cât 1 cm. *)

Să se deducă din această reprezentare exactă, care este mai mare din cele numere.

Să se calculeze apoi valorile apropiate, cu două zecimale, al rădăcinilor $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ și să se calculeze aproximativ valorile apropiate prin lipsă ale celor două numere.

O. N. Ț.

IV. 605. Să se calculeze valoarea exactă a produsului :

$$P = (+2 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) (-3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

și să se reprezinte rezultatul obținut pe o axă orientată *).

Să se calculeze apoi valoarea produsului cu o aproximație mai mică ca 0,01 prin lipsă.

O. N. Ț.

IV. 606. Să se calculeze suma

$$S = (-1)^n + (-1)^{n+1} + \dots + (-1)^{n+p},$$

n și p fiind numere întregi.

GH. B.

IV. 607. Să se calculeze :

$$a^2 + 2a(a-b) + 3b(a+b+c) - 4(a-b)^2 - 3(b-c)^2 - 2(c-a) - c^2.$$

C. I. B.

Clasa V-a. Exerc. 710. Dacă $x + y + z = u$, atunci :

$$(ux + yz)(uy + zx)(uz + xy) \equiv [(x + y)(y + z)(z + x)]^2.$$

GH. B.

*) A se vedea *Algebra* clasa IV-a de Prof. O. N. ȚINO Edit. Cugetarea București.

V. 711. Să se arate că patraturul sumei

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

se poate pune sub forma

$$P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR$$

unde P, Q, R sunt de forma $u^2 - vw$.

GH. B.

V. 712. În triunghiul dreptunghic ABC ipotenuza AB este dublul catetei BC. Fie D mijlocul lui $\overline{BC}$ și M mijlocul lui $\overline{DC}$.

Să se arată că :

$$\overline{AM} + \overline{MC} = \overline{AB}.$$

GH. B.

V. 713. Să se simplifice expresiunea :

$$\begin{aligned} E \equiv & \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + ab)^3(a^2 + b^2 - ab) - (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab)^2(a^2 - ab + b^2)^2}{(a^4 + b^4 + a^2b^2)[(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2]} \\ & + \frac{(a - b)^2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 - b^2 + ab)(a^2 - b^2 - ab)}{(a^4 + b^4 - 3a^2b^2)(a^2 - b^2)[(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2]} \\ & + \frac{(a + b)^3(a^2 + b^2 - ab)^2}{(a - b)[(a^3 - b^3)^2 - (a^3 + b^3)^2]}. \end{aligned}$$

O. N. Ț.

V. 714. Să se determine m și n pentru ca polinomul

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20x^2 + mx + n$$

să fie un cub perfect.

C. I. B.

Clasa VI-a. Exerc. 699. Fie dat un trapez isoscel ABCD, având baza mică $\overline{AD} = a$, baza mare $\overline{BC} = 2b$ și laturile egale $\overline{AB} = \overline{DC} = c$. Cu ce lungime trebuie micșorată la ambele capete baza mică și cu ce lungime trebuie mărită la ambele capete baza mare, pentru ca aria noului trapez să fie de k ori aria trapezului dat, iar perimetrul noului trapez să fie de m ori perimetrul trapezului dat.

O. N. Ț.

VI. 700. Care sunt laturile triunghiului ABC, dacă medianele BB' și CC' au respectiv lungimile n și p , iar suma laturilor corespunzătoare este l .

O. N. Ț.

VI. 701. Să se calculeze valorile exacte ale liniilor trigonometrice următoarea:

$$\operatorname{tg} 15^\circ ; \operatorname{cotg} 22^\circ 30' ; \operatorname{tg} 9^\circ ; \operatorname{cotg} 4^\circ 30'.$$

O. N. Ț.

VI. 702. Să se găsească toate arcele x astfel ca să avem:

$$15 \sin^4 x - 37 \sin^2 x + 22 = 0.$$

VI. 703. Să se afle progresia aritmetică pentru care

$$a = 3 , \quad n = 21 , \quad l = 103.$$

C. I. B.

VI. 704. Să se afle 4 numere în progresie aritmetică știind că suma lor este 48, iar suma patratelor 596.

C. I. B.

Clasa VII-a. Exerc. 620. Să se calculeze, pe calea cea mai scurtă, suma următoare:

$$\begin{aligned} S &= (456^7 + 544^7) + 7.248064 (456^5 + 544^5) \\ &+ 21.248064^2 (456^3 + 544^3) + 35.248064^3 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

O. N. Ț.

VII. 621. Să se verifice egalitatea

$$\begin{aligned} [128^2 - 1222 + 324 \sqrt{1598}] (128 + 2 \sqrt{1598}) (34 + 2 \sqrt{1598}) = \\ 8 (47^3 + 34^3) \sqrt{1598} + 28.1598 (47^2 + 34^2) + 56.81.1598 \sqrt{1598} + \\ + 70.1598^2 + 34^4; \end{aligned}$$

apoi să se stabilească această egalitate, plecând dela o egalitate cunoscută.

O. N. Ț.

VII. 622. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 623. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b-a \\ a & b-a & 1 \\ b-a & 1 & a \end{vmatrix}$$

punându-se rezultatul sub formă de produs.

C. I. B.

VII. 624. Să se calculeze produsul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & 1 \\ b^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & 1 \\ c^2 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

și să se găsească un determinant de ordinul III cu aceeași valoare.

C. I. B.

VII. 625. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$x + ay + (a + 1)z = a + 2$$

$$x + by + (b + 2)z = b + 4$$

$$x + cy + (c + 3)z = c + 6.$$

C. I. B.

VII. 626. Să se calculeze suma cuburilor coeficienților dezvoltării

$$(x + a)^{51}.$$

C. I. B.

Clasa VIII-a. Exerc. 502. Un dreptunghi variabil ABCD are laturile AB, AD fixe ca poziție, iar perimetrul constant. Laturile AB și AD având constant aceeași direcție, care este locul punctului C?

Care este locul punctului de întâlnire al diagonalelor dreptunghiului?

Care sunt locurile mijloacelor laturilor CB și CD?

Să se dea și o soluție prin geometria elementară pură.

O. N. Ț.

VIII. 503. Pe laturile orientate ale unui unghi xox' luăm două segmente OA și OA' de aceeași orientare cu axele respective, variabile și proporționale cu două lungimi date m și n .

Pe segmentele OA și OA' construim două triunghiuri echilaterale OBA și OB'A'.

Care este locul punctului M de întâlnire al laturilor BA, B'A'?

Aceeași chestiune pentru cazul, când triunghiurile construite, în loc să fie echilaterale, sunt două triunghiuri asemenea.

Să se dea și o soluție prin geometria elementară pură.

O. N. Ț.

VIII. 504. Se dau punctele:

$$A(a, b) \quad , \quad B(b, c) \quad , \quad C(c, a).$$

Să se afle suma patratelor laturilor și suma patratelor medianelor.

C. I. B.

VIII. 505. Se dau punctele:

$$A(1, 1) \quad , \quad B(a, b) \quad , \quad C(a+1, b+1).$$

Să se verifice concurența medianelor acestui triunghi.

C. I. B.

VIII. 506. Se dau punctele:

$$A(a, 1), \quad B(b, 1), \quad C(1, a+b).$$

Să se calculeze aria triunghiului și să se studieze variația acestei arii când $b = a + 2$.

C. I. C.

VIII. 507. Se dau drepte

$$x + ay + b = 0, \quad ax + by + 1 = 0, \quad bx + y + a = 0.$$

Să se verifice concurența înălțimilor.

C. I. B.

VIII. 508. Se dau drepte:

$$x + ay + b = 0, \quad x + a^2y + b^2 = 0, \quad x + a^3y + b^3 = 0.$$

Să se afle aria triunghiului determinat de aceste drepte și coordonatele centrului cercului circumscris.

C. I. B.

VIII. 509. Să se rezolve grafic inecuația

$$\frac{(x^2 - 1)(x + y - 3)(2xy + 1 - x^2 - y^2)}{(x^2 - 4)(y^2 - 9)} < 0.$$

C. I. B.

Exerciții Generale. *E. G. 400.* Dacă se scrie primul număr din perioada a doua a lui ARHIMEDE, adică „*octada de octade*“, cifra zero având 1,5 mm lățime și intervalul și intervalul dintre ele fiind 1 mm, ce lungime va avea numărul?

I. L.

E. G. 401. Dacă unui număr de trei cifre îi intercalăm o altă cifră între cifrele lui, obținem două numere de patru cifre diferite. Care dintre acele numere va fi mai mare?

I. L.

E. G. 402. Un număr are *opt* cifre mai mari ca 2 și mai mici ca 8. Ce modificare va suferi acel număr dacă îi vom spori cu 2 cifrele de rang pereche și îi vom micșora cu 2 pe celelalte patru cifre? Dar dacă sporim cu 2 primele patru cifre și micșorăm cu 2 ultimile patru?

Numerotarea cifrelor o facem în sensul scrierei, dela stânga la dreapta.

I. L.

E. G. 403. Să se găsească expresiunea generală a numerilor cărora mutându-le cifra cu care începe la coadă, se obțin multipli ale acelor numere.

I. L.

E. G. 404. Două persoane stau față în față la aceeași masă. Una scrie un număr cu cifrele 0, 6, 9; cealaltă persoană citindu-l, citește un număr cu 29703, mai mic. Ce număr a scris prima persoană?

I. L.

E. G. 405. Dacă numărul N^N are n cifre, câte cifre ar putea avea N ?

E. G. 406. Adunând suma a două numere de două cifre cu suma răsturnatelor lor, se obține 132.

Care sunt acele numere?

I. L.

E. G. 407. Se cere un număr de trei cifre așa că mutându-i cifra dela stânga la dreapta, să-l sporim cu 99.

I. L.

E. G. 408. Să se înmulțească dela stânga spre dreapta numerile 1941 și 46.

I. L.



INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foi.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru redijarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) *Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții” al Gazetei Matematice, pe adresa Căpitan Ing. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.*

Drepturile de reproducere rezervate Societății „Gazeta Matematică”.

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. N. Abramescu, Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a	Lei 120
IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, Vocabular Matematic	Lei 20
X. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
XI. Gazeta Matematică 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.)	pentru particulari Lei 200 pentru abonații G. M. și S. G. M. Lei 150
XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu	Lei 95
XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională	Lei 190
XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu	Lei 125
XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită	Lei 120
XVI. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăugită de N. G. Botea	Lei 140
XVII. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită	Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui Euclid. (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian	Lei 160
Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere)	Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.
(Telefon : 3-9803).



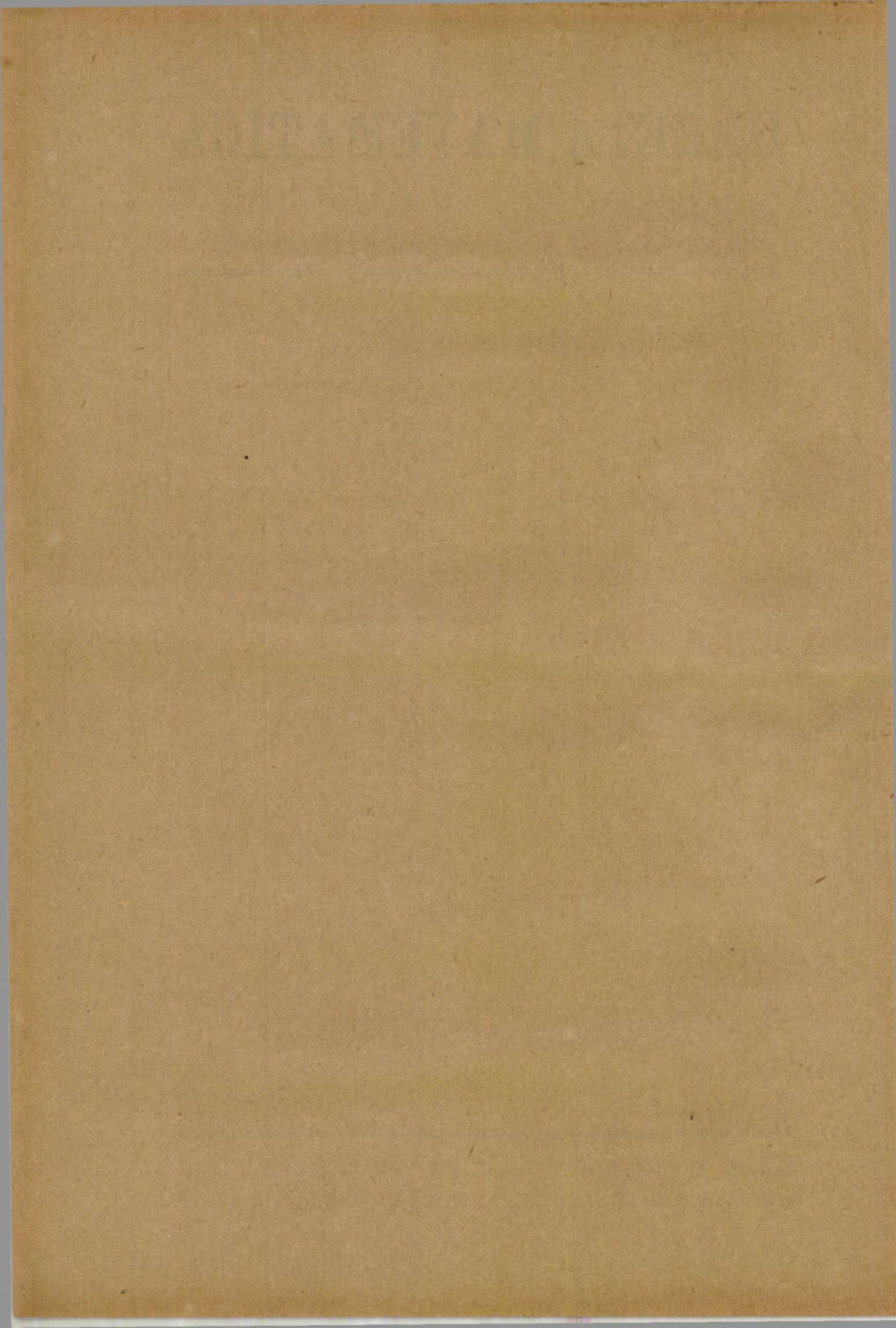
GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 3

1 DECEMBRIE 1941

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803



GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL VIII. No. 3

1 DECEMBRIE 1941

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCIȚII REZOLVATE

Exerciții Generale. E. G. 360. Dacă avem :

$$i_1 = \sqrt{-1} ; i_2 = \sqrt{-i_1} ; \dots i_n = \sqrt{-i_{n-1}}$$

să se calculeze produsul :

$$P_{(n,n)} = i_1^{i_1} \cdot i_2^{i_2} \dots i_n^{i_n}.$$

I. L.

În G. M. XXIX, 133 și 253 se arată că :

$$i_n = i^{2^{n-1}} \text{ unde } i = i_1 = \sqrt{-1}.$$

Prin urmare :

$$P_{(n,n)} = i^A ; A = \frac{1}{1} i_1 + \frac{3}{2} i_2 + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} i_n.$$

Dar A mai poate să fie scris :

$$A = \frac{1}{1} \cdot i^{\frac{1}{1}} + \frac{3}{2} i^{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \cdot i^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}}.$$

Observăm însă lesne că :

$$\begin{aligned} A &= \frac{d}{di} \left[i \cdot \left(i^{\frac{1}{1}} + i^{\frac{3}{2}} + \dots + i^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}} \right) \right] \\ &= - \frac{d}{di} \left[1 + i^{\frac{1}{2}} + i^{\frac{3}{2^2}} + \dots + i^{\frac{2^n - 1}{2^{n-1}}} \right]. \end{aligned}$$

Cum avem :

$$i^{\alpha} = e^{\frac{(2k+1)\pi}{2} \cdot i \cdot \alpha} = e^{\theta \cdot i}$$

urmează că paranteza este imaginară, prin urmare A este imaginar, de forma: $a + ib$.

În consecință :

$$P_{(n:n)} = \text{imaginar.}$$

I. L.

E. G. 361. Dacă avem :

$$i_1 = \sqrt{-1} ; i_2 = \sqrt{-i_1} ; \dots i_n = \sqrt{-i_{n-1}}$$

să se calculeze produsul :

$$P_{(n:n)} = i_1^{\frac{1}{i_1}} \cdot i_2^{\frac{1}{i_2}} \dots i_n^{\frac{1}{i_n}}.$$

I. L.

În G. M. XXIX 133 și 253 avem :

$$\frac{1}{i_n^{i_n}} = i^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \cdot i^{-\frac{2^n-1}{2^{n-1}}}}$$

unde $i = i_1 = \sqrt{-1}$.

Prin urmare :

$$P_{(n:n)} = i^B$$

unde avem :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1} \cdot i^{-\frac{1}{1}} + \frac{3}{2} i^{-\frac{3}{2}} + \dots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \cdot i^{-\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{1}} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \\ &= \frac{d}{d\left(\frac{1}{i}\right)} \left[\left(\frac{1}{i}\right) \left[\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{1}} + \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \right] \right] \\ &= -\frac{d}{d\left(\frac{1}{i}\right)} \left[1 + \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots + \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{2^n-1}{2^{n-1}}} \right] \end{aligned}$$

Cum avem :

$$\left(\frac{1}{i}\right)^a = e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2} \cdot i \cdot a} = e^{-\theta \cdot i}.$$

Urmează că :

$$P_{(n;n)} = \text{imaginar.}$$

I. L.

*E. G. 365. Pentru care cub perfect rădăcina lui este egală cu a 20-a parte a patratului ei, plus 5 ?
(Enunț rectificat).*

I. L.

Avem :

$$\sqrt[3]{N} = \frac{1}{20} \cdot (\sqrt[3]{N})^2 + 5.$$

Punând $N = P^3$, avem :

$$20 \cdot P = P^2 + 100$$

sau :

$$P^2 - 20 \cdot P + 100 = (P - 10)^2 = 0.$$

Deci $P = 10$.

I. L.

E. G. 366. Dacă din cifrele unui număr de trei cifre, scris în sistemul zecimal, scădem un număr n , putem obține același număr scris în sistemul cu baza 9 ?

I. L.

Avem abc numărul, atunci :

$$100 \cdot (a - n) + 10(b - n) + c - n = 81 \cdot a + a \cdot b + c.$$

De unde deducem că :

$$19 \cdot a + b = 111 \cdot n$$

Dar a și b sunt mai mici ca 9.

Trebue ca $(19 \cdot a + b)$ să fie un număr de trei cifre identice. Inșă afară de numărul formal 000, nu avem soluție.

I. L.

E. G. 367. In ce caz numărul

$$N = 13^n + (-2)^n + (-11)^n$$

se împarte exact prin 147, fără să se împartă cu 286, sau viceversa?

I. L.

Dacă avem în general:

$$N = (a + b)^n + (-a)^n + (-b)^n$$

$$A = a^2 + ab + b^2$$

$$B = ab \cdot (a + b).$$

Atunci putem scrie că dacă (vezi „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, pag. 276):

$$n = 6 \cdot m \text{ atunci } N \neq MA \text{ și } MB.$$

$$n = 6m + 1 \quad ; \quad N = MA^2 \cdot B$$

$$n = 6m + 2 \quad ; \quad N = MA \text{ și } \neq MB$$

$$n = 6m + 3 \quad ; \quad N = MB \text{ și } \neq MA$$

$$n = 6m + 4 \quad ; \quad N = MA^2 \text{ și } \neq MB$$

$$n = 6m + 5 \quad ; \quad N = MAB.$$

Aceasta se deduce cu ușurință ținând seamă că avem:

$$(a + b)^n - a^n - b^n = n \cdot A \cdot B \cdot \left[A^{n-3} - \frac{n-3}{2!} \cdot A^{n-5} \cdot B \right. \\ \left. + \frac{(n-4)(n-5)}{3!} A^{n-7} \cdot B^2 \dots \right].$$

(Vezi „*Formula lui WARING*“ din „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, pag. 223).

In cazul exercițiului No. 367, avem: $a = 2$ și $b = 11$.

I. L.

E. G. 369. Să se arate că dacă :

$$a + b + c = 0$$

atunci $a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}$ se împarte exact cu $a^3 + b^3 + c^3$.

I. L.

Se știe din „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, pag. 180 că avem :

$$(x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1} = M [(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3].$$

În cazul nostru, dacă punem :

$$a = x + y ; \quad b = -x ; \quad c = -y \text{ și } z = 0$$

avem tocmai cazul de mai sus.

Cele de mai sus pot fi stabilite și prin simplă diviziune algebrică.

I. L.

E. G. 370. Știind că $a + b + c = 0$, în ce caz $a^n + b^n + c^n$ se împarte exact cu $(a+b)(b+c)(c+a)$?

I. L.

În „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, pag. 179 avem :
Suma :

$$x^n + y^n + z^n - (x+y+z)^n$$

se împarte exact cu :

$$(y+z)(z+x)(y+x)$$

dacă n este impar.

Dacă $x = a$, $y = b$, $z = c$ și dacă $a + b + c = 0$, atunci găsim cazul exercițiului No. 370, deci trebuie ca n să fie impar.

I. L.

**Până la 10 Noemvrie s'au primit soluții bune
la exercițiile propuse în Numerele 1 și 2 dela*):**

Liceul „Carmen Sylva“, București.

Clasa VI-a : MATEESCU C. VIRGINIA (VI : 695, E. G. : 395), STOICESCU VIORICA (VI : 703, E. G. : 393, 404, 6).

Clasa VII-a : MIHĂESCU I. ILEANA (VII : 497).

Liceul „Iulia Hasdeu“, București.

Clasa VIII-a : MARINICĂ I. EMILIA (VIII : 496).

Institutul Ortodox Internat, București.

Clasa V-a : MATEESCU P. MIHAELA (V : 705, 7, VI : 695).

Liceul „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa VII-a : TEODORESCU OLGA (VII : 582).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VII-a : PRISCU R. A. (VII : 622, 3, 5).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa III-a : DUMITRESCU F. S. (VI : 693*, 5).

Clasa VI-a : DUMITRESCU F. D. (VI : 693, 6).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI G. D. (III : 185).

Clasa V-a : IORGU G. R. (V : 709).

Clasa VIII-a : CORBARU A. D. (VIII : 505, 6), SENI C. (VIII : 496, 7, 501, E. G. : 397).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa VI-a : IONESCU G. I. (VI : 695, 8, 703, 4), VERNESCU V. M. (VI : 693*, 5, 6).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa V-a : IEȘAN S. A. (V : 705, 9).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa VI-a : TĂTĂRĂSCU E. D. (VI : 695, 8, 703).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul Internat, Buftea.

Clasa VIII-a: IONESCU D. T. (VIII: 497, 8).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I“, Craiova.

Clasa VIII-a: FILIP G. G. (VIII: 494, 7, 8, 501).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a: IONESCU N. (E. G.: 392).

Clasa V-a: DIMITRIU N. V. (V: 705).

Clasa VII-a: ANTONIU I. I. (VII: 614, VIII: 497, 8), DIACON A. (E. G. 389).

Clasa VIII-a: MATEESCU A. (VIII: 494, 6, 7, 8, E. G.: 392, 4, 5, 9), MOVANU P. (VIII: 494, 7, 8), SIMION I. Z. (VIII: 496, 7, 8).

Liceul „Negru Vodă“, Făgăraș.

Clasa VI-a: BABEA I. I. (VI: 695).

Colegiul Național „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa IV-a: COLUMBEANU D. P. (IV: 571).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa V-a: ȘERBAN M. C. (V: 707).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa VII-a: ROVENȚA I. C. (VII: 614, E. G.: 392, 5).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa VIII-a: DĂNĂU C. C. (VIII: 504, 5, 6, 7).

EXERCIIII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1942

Clasa III-a. Exerc. 189. Fie triunghiul ABC. Cercul cu centrul în C și raza $\overline{CA}$ taie semidreapta CB în M; cercul cu centrul în B și raza $\overline{BA}$ taie semidreapta BC în N. Paralelele duse prin M și N respectiv la laturile AC și AB se taie în P; paralelele duse prin B și C la AC și AB taie respectiv pe NP și MP în S și R. Să se arate:

- Punctul P se găsește pe bisectoarea unghiului BAC.
- Segmentele SB și RC sunt egale.

O. N. Ț.

III. 190. Dacă două triunghiuri cu unghiurile respectiv egale au două laturi neomoloage egale, lungimea comună a celor două laturi egale este medie geometrică între lungimele laturilor omoloage cu cele două laturi egale.

O. N. Ț.

III. 191. Fie triunghiul oarecare ABC. Cercul cu centrul în B și raza $\overline{BC}$ taie pe $\overline{AB}$ în D, iar cercul cu centrul în C și raza CB taie pe AC în E. Paralelele duse prin D și E respectiv $\overline{AC}$ și AB taie pe BC în G și F.

Măsurăm pe AB segmentul $\overline{AM} = \overline{CF}$ și pe AC segmentul $\overline{AN} = \overline{BG}$.

a) Să se arate că MN este paralelă la BC.

b) Având: $\overline{AB} = 80$ cm; $\overline{BC} = 50$ cm; $\overline{AC} = 60$ cm, să se calculeze lungimile lui $\overline{CF}$ și $\overline{BG}$.

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 608. Să se simplifice expresiile:

$$E_1 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(a^2 - c^2) - (a^2 + b^2 - d^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)}{b^2 c^2 + a^2 d^2 - b^2 d^2 - a^2 c^2} + \frac{b^2(b^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

$$E_2 = \frac{a^2(a^2 - d^2)}{b^2 - a^2} - \frac{(b^2 - d^2)(a^2 - c^2)(a^2 + b^2 - d^2) - (b^2 - d^2)(a^2 - d^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) - (a^2 - d^2)(b^2 - c^2)}$$

O. N. Ț.

IV. 609. Se dă un triunghi ABC și se duce prin A o paralelă la BC, pe care se iau punctele D și E astfel ca $\sphericalangle ABD = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle ACE = \sphericalangle B$ (triunghiurile ABD și ACE exterioare triunghiului ABC). Să se arate că:

$$1^0. \quad \overline{AB} + \overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}(\overline{BD} + \overline{DE} + \overline{EC})}.$$

2⁰. Notând cu S aria trapezului BDEC, cu s aria triunghiului ABC și cu h înălțimea ce pleacă din A în triunghiul ABC, avem:

$$4Ss = h^2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2).$$

G. D. S.

IV. 610. Să se calculeze suma:

$$\frac{a+1}{2a-2} - \frac{5-6a}{3a+3} - \frac{a}{10-10a} + \frac{1}{a^2-1} - \frac{3}{5-5a^2}.$$

C. I. B.

IV. 611. Să se efectueze:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1\right)^3 \left(1 - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)^3.$$

C. I. B.

Clasa V-a. Exerc. 715. Fie triunghiul ABC. Cercul cu centrul în C și raza $\overline{CA}$ taie dreapta BC în M; cercul cu centrul în B și raza $\overline{BA}$ taie dreapta BC în N.

Paralelele duse prin M și N respectiv la laturile AC și AB se taie în P; paralelele duse prin B și C la AC și AB taie respectiv pe NP și MP în R și S. Să se arate:

a) Punctul P aparține uneia din bisectoarele unghiului BAC.

b) Segmentele BR și CS sunt egale cu media geometrică a segmentelor MR și NS.

O. N. Ț.

V. 716. Fie triunghiul oarecare ABC. Cercul cu centrul în B și raza $\overline{BC}$ taie prelungirea lui $\overline{AB}$ în D, iar cercul cu centrul în C și raza $\overline{CB}$ taie prelungirea lui $\overline{AC}$ în E.

Paralelele duse prin D și E la AC și AB taie pe BC în punctele G și F. Măsurăm pe AB segmentul $\overline{AM} = \overline{BG}$ și pe AC segmentul $\overline{AN} = \overline{CF}$.

Să se arate că patrulaterul BMNC este inscriptibil.

O. N. Ț.

V. 717. Se dă triunghiul ADB dreptunghiu în D. Fie E piciorul bisectoarei unghiului BAD, M proiecția lui D pe AE, F simetricul lui A față de M și C intersecția lui BF cu AD. Să se arate că CE trece prin mijlocul lui $\overline{AB}$.

GH. B.

V. 718. Mediatoarea laturei BC a triunghiului ABC întâlnește laturile AB și AC în C' și B' . Să se arate că CC' și BB' se întâlnesc pe cercul ABC.

GH. B.

V. 719. Să se arate că rezolvarea sistemului

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= a_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 &= a_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 &= a_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= a_4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= a_5 \end{aligned} \quad (1)$$

se reduce la rezolvarea unui sistem de forma:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = b_1, & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = b_2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = b_3, & x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = b_4 \end{cases}$$

și să se rezolve apoi.

O. N. Ț.

Clasa VI-a. Exerc. 705. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2(x+a) - 2 \cos a \cos x \cos(x+a) + \cos^2 a = \sin 2x.$$

GH. B.

VI. 706. Să se găsească toate arcele mai mici ca 2π , care satisfac ecuația:

$$\sin px + m \sin(p+q)x + \sin(p+2q)x = 0.$$

Discuție.

O. N. Ț.

VI. 707. Să se rezolve inegalitatea

$$\frac{(x^4 - 5x^2 + 6)[(x^2 + 2)^2 + 4x^4 + 4x^2 + 1]}{(x^2 + 2x - 1)^3 + (x^2 - 2x - 1)^3} < 0$$

și să se reprezinte pe o axă segmentele care satisfac inegalitatea.

O. N. Ț.

VI. 708. Sunt date două drepte (A) și (B) perpendiculare, situate într'un plan (P) și un punct M exterior planului (P) și la distanța $\overline{MO} = c$ de planul (P). Știind că distanțele punctului M la dreptele (A) și (B) sunt $\overline{MC} = a$ și $\overline{MD} = b$, să se calculeze

1. Distanța punctului M la punctul I de intersecție al dreptelor (A) și (B).

2. Distanța punctului M la dreapta CD.

3. Distanța cea mai scurtă între dreptele (MO) și (A) și asemenea între dreptele (MO) și (B).

(Notă. Distanța cea mai scurtă între două drepte neașezate în același plan o măsoară perpendiculara comună a celor două drepte).

O. N. Ț.

VI. 709. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 - \cos 2x}} =$$

$$= \operatorname{cotg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} \cdot \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)}.$$

O. N. Ț.

VI. 710. Să se verifice identitatea:

$$\sin^2 x (1 - \sin x) - \cos^2 x (1 - \cos x) = (p + 1)^2 (\cos x - \sin x) +$$

$$+ (1 - \cos x) (p + \sin x)^2 - (1 - \sin x) (p + \cos x)^2.$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 627. Să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \\ 1 & \cos x & \cos^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p + 1 & (p + 1)^2 \\ 1 & p + \sin x & (p + \sin x)^2 \\ 1 & p + \cos x & (p + \cos x)^2 \end{vmatrix}$$

Să se generalizeze.

O. N. Ț.

VII. 628. Să se calculeze determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

N. M.

VII. 629. Să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ u & b & c & d \\ v & b' & c' & d' \\ w & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & u & c & d \\ a' & v & c' & d' \\ a'' & w & c'' & d'' \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & b & u & d \\ a' & b' & v & d' \\ a'' & b'' & w & d'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & u \\ a' & b' & c' & v \\ a'' & b'' & c'' & w \end{vmatrix} = 0.$$

N. M.

VII. 630. Să se arate că:

$$3 \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b+c & a-b \\ x+y+z & x-y \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a+b+c & b-c \\ x+y+z & y-z \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a+b+c & c-a \\ x+y+z & z-x \end{vmatrix}.$$

N. M.

VII. 631. Fie ABCD un patrulater, în care $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$. Se notează:

$$\widehat{ABD} = \beta, \quad \widehat{CBD} = \beta', \quad \widehat{ADB} = \delta, \quad \widehat{CDB} = \delta'.$$

Să se demonstreze relația:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \sin \beta \sin \delta' + \sin \delta \sin \beta'.$$

GH. D.

VII. 632. Să se calculeze determinantul :

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 0 & \cos^2 \alpha & 1 \\ 0 & \cos^2 \beta & 1 & \sin^2 \beta \\ \cos^2 \gamma & 1 & \sin^2 \gamma & 0 \\ 1 & \sin^2 \delta & 0 & \cos^2 \delta \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 633. Să se demonstreze egalitatea :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+b & a+c \\ c^2+a^2 & a^2+b^2 & b^2+c^2 \end{vmatrix} = a(a-c)^2 + b(b-a)^2 + \\ + c(c-a)^2 + (b-a)(c-a)(c-b).$$

GH. D.

Clasa VIII-a. Exerc. 510. Dacă A, B, C, D formează o divizie armonică în care A, B și C, D sunt perechi de puncte conjugate, I și J mijloacele segmentelor AB și CD, iar G centrul mediilor distanțe ale punctelor A, B, C, D, avem relațiile :

$$2(\overline{GA} \cdot \overline{GB} + \overline{GC} \cdot \overline{GD}) + \overline{IJ}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \overline{AG}^2 - 2 \overline{AC} \cdot \overline{AD} &= \overline{BG}^2 - 2 \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{CG}^2 - 2 \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \\ &= \overline{DG}^2 - 2 \overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{IJ}^2. \end{aligned}$$

N. M.

VIII. 511. Dacă A, B, C, D formează o divizie armonică în care A, B și C, D sunt perechi de puncte conjugate, I și J mijloacele segmentelor AB, CD, G centrul mediilor distanțe ale punctelor A, B, C, D, iar O un punct arbitrar pe dreapta ABCD, avem relația :

$$\overline{OG}^2 - \overline{IJ}^2 = 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}).$$

N. M.

VIII. 512. Dacă m, n, p sunt rădăcinile ecuației

$$a + bu + cu^2 + u^3 = 0,$$

iar x, y, z, t arbitrare, avem :

$$\begin{vmatrix} m & n & p & x \\ m^2 & n^2 & p^2 & y \\ m^3 & n^3 & p^3 & z \\ m^4 & n^4 & p^4 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \\ m^3 & n^3 & p^3 \end{vmatrix} \cdot (ax + by + cz + t).$$

N. M.

VIII. 513. Să se rezolve ecuația :

$$x^8 + px^7 + rx^6 + 4px^5 + (2r - 1)x^4 + 4px^3 + rx^2 + px + 1 = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 514. Să se rezolve ecuația :

$$x^8 + px^7 + rx^6 + psx^5 + (7k^2 + 2kr - 6ks + s^2)x^4 + pksx^3 + rk^2x^2 + pk^3x + k^4 = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 515. Fie un patrat ABCD și O centrul său.

Pe prelungirile laturilor DA, AB, BC, CD se iau respectiv segmentele $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$ (Punctele A, B, C, D sunt așezate respectiv între D, M; A, N; B, P; C, Q). Dreapta MP taie laturile AB, CD respectiv în E, G; iar dreapta NQ taie laturile BC, AD respectiv în F, H.

Să se demonstreze că dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor complete OHAEMN, OHDGQM, OGCFQP și OEBFNP formează, prin intersecțiile lor, un patrat.

GH. D.

VIII. 516. Să se cerceteze dacă punctele :

$$A \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) ; B (\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha) ; C (\sin^2 \beta, \cos^2 \beta)$$

sunt în linie dreaptă.

Să se scrie ecuația perpendicularei ridicată în punctul B pe dreapta AC.

C. I. B.

VII. 517. Se consideră un cerc O cu centrul în origina axelor de coordonate și triunghiul $A_1 B_1 C_1$ dat prin vârfurile :

$$A_1 (49, 0), B_1 (0, -7) \text{ și } C_1 (56, -49).$$

Se cere :

1. Să se afle coordonatele vârfurilor triunghiului $A_2 B_2 C_2$ înscris în cercul O și omotetic cu triunghiul $A_1 B_1 C_1$.

2. Să se afle raportul dintre ariile triunghiurilor $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$.

3. Să se afle centrul de omotetie al cercurilor $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ și apoi să se scrie ecuațiile tangentelor comune exterioare.

GH. D.

Exerciții Generale. *Exerc. 409.* Un număr de două cifre este egal cu răsturnatul lui plus una din cifrele sale,
Care este acel număr?

I. L.

E. G. 410. Unui număr de trei cifre i se adună de opt ori suma cifrelor lui și se obține 1008.
Care este acel număr?

I. L.

E. G. 411. Care este cea mai mare și cea mai mică etate a unui om, care a apucat în viața lui șase ani terminați cu o aceeași cifră?

I. L.

E. G. 412. Cu cifrele a , $(a + b)$, $(a + 3b)$ și $(a + 4b)$ se scriu două numere de două cifre, a căror sumă poate să fie maximă sau minimă.

Dacă diferența celor două numere este 108, care sunt acele cifre?

I. L.

E. G. 413. O persoană s'a născut cu cinci ani înainte sau după apariția primului număr din revista *Gazeta Matematică*; în ce an vârsta acelei persoane este egală cu suma cifrelor anului?

I. L.

E. G. 414. Dispunând de opt greutateți de 1 gr și de șase de 3 gr, în câte moduri se poate cântări cu o terezie o greutate de 10 gr?

I. L.

E. G. 415. Dacă două numere diferă cu $2k$, produsul lor sporit cu k^2 este pătratul mediei aritmetice a celor două numere.

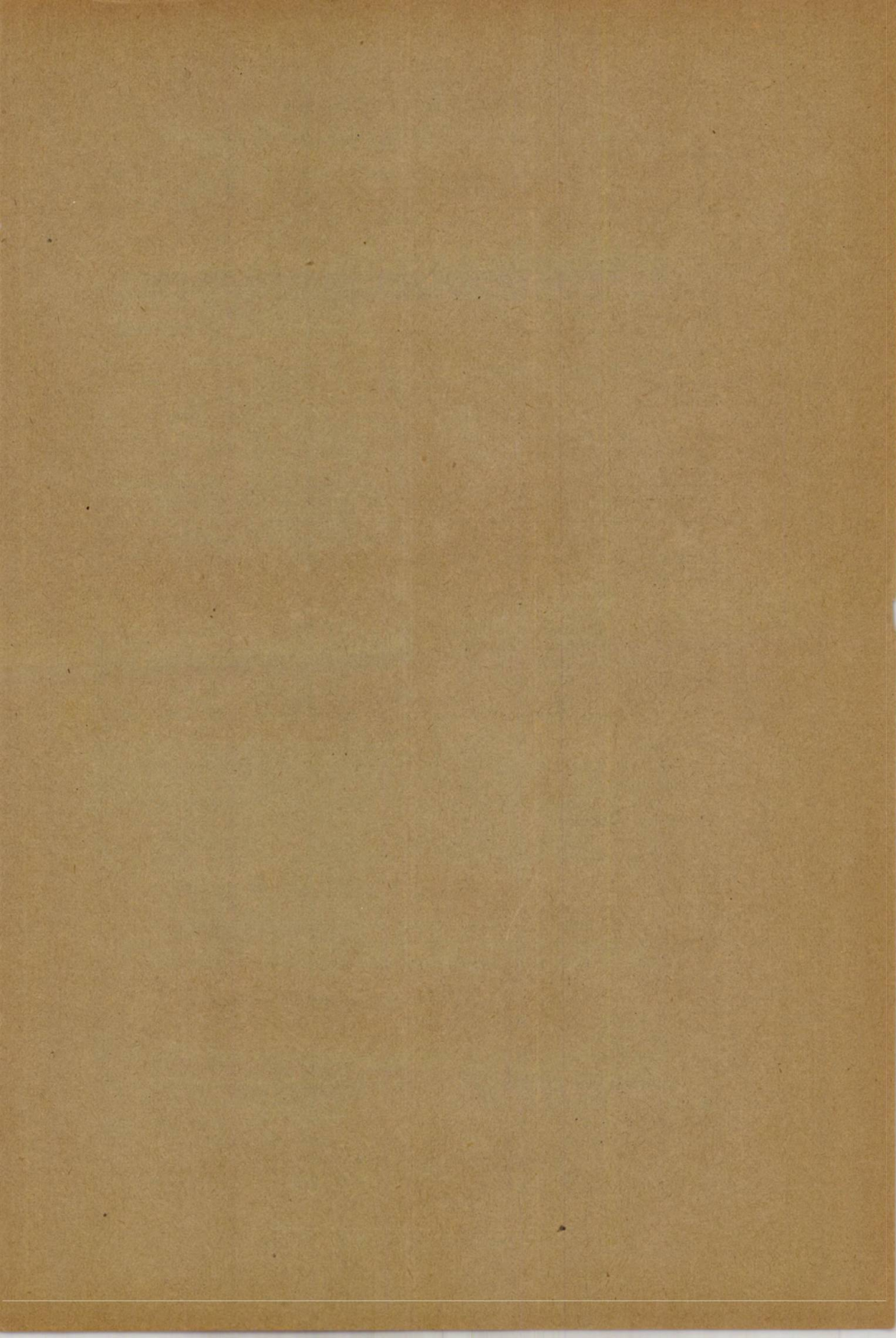
I. L.

E. G. 416. Înmulțind un număr cu 1941, găsim produsul $8 * 2 * 6$. Steluțele indicând cifre cari s'au șters, se cere a se restabili produsul.

I. L.

E. G. 417. Să se împartă numărul $3 * 77 ** 5$ exact prin 1941.

I. L.



ISTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțit de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscalite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află. Pentru rediarea soluțiilor se pot vedea indicațiile din Nr. 1, Vol. IV.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiilor, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții” al Gazetei Matematice, pe adresa Căpitan Ing. C. D. Ionescu-Țiu, Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică»

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. N. Abramescu, Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru
clasa VIII-a științifică, Editia VI-a Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și
G. Titeica, Vocabular Matematic Lei 20

X. G. Tîţeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
--	---------

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar

(500 pag.)	pentru particulari pentru abonatii G. M. si S. G. M.	Lei 200 Lei 150
------------	---	-----------------------------------

XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu. Lei 95

XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională Lei 190

XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăugită de Gh. Th.

XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Lei 125

Ediția IV-a revăzută și mărită Lei 120
XVI. **G. Țiteica**, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I.

Ediția II-a, adaogită de *N. G. Botea* Lei 140
XVII. **A. G. Ioachimescu**, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a.
Ediția II-a, adaogită de *N. G. Botea* Lei 140

Ediția IV-a, revăzută și mărită Lei 240
Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

1. Elementele lui **Euclid**. (Cărtile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* Lei 160

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică — Calea Grivitei No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).



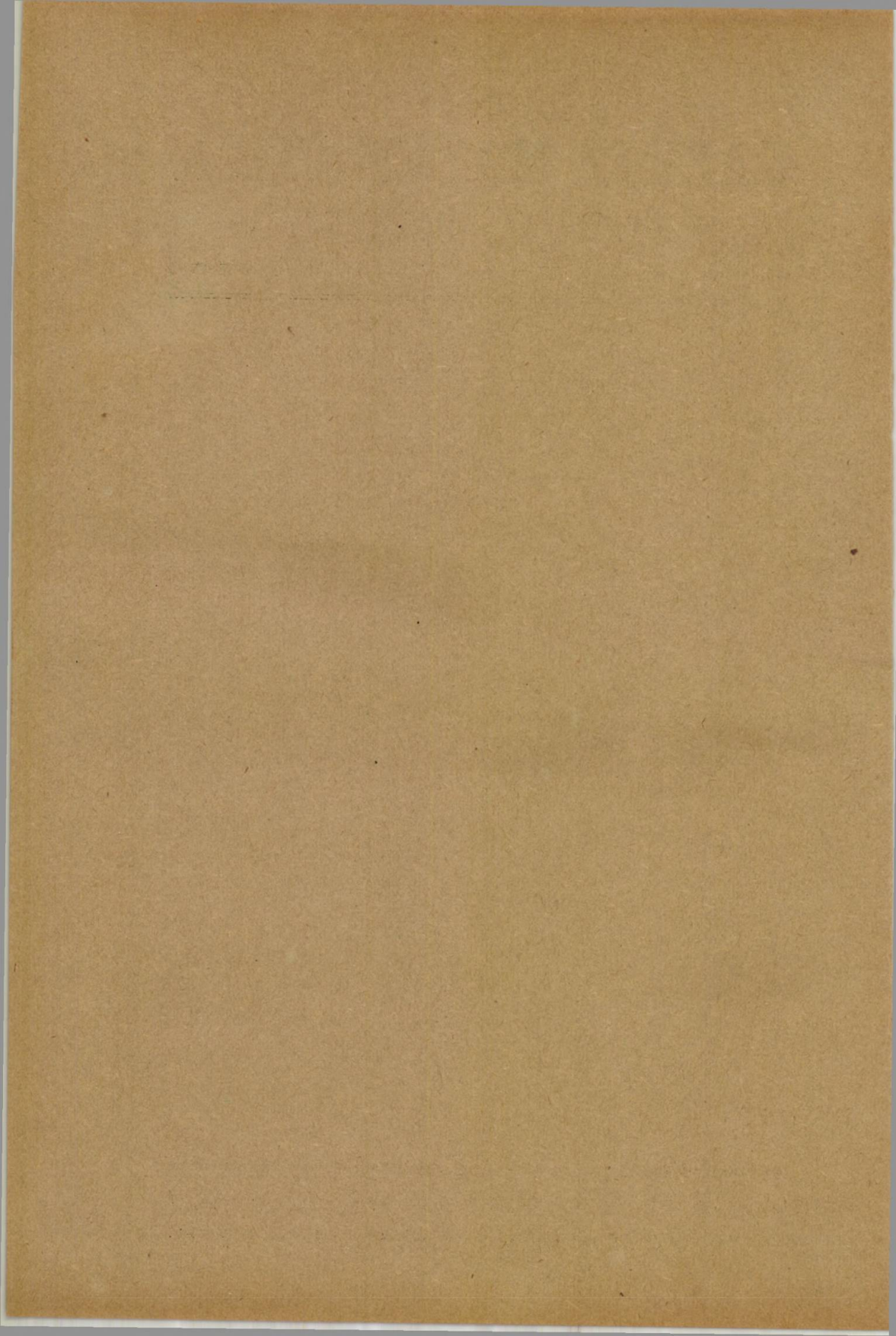
GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 4

1 IANUARIE 1942

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803



GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIIII

ANUL VIII. No. 4

1 IANUARIE 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-TIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCIIII REZOLVATE

Clasa V-a. Exerc. 675. Se dă paralelogramul ABCD. Pe mijlocul lui AB se ridică o perpendiculară Δ . Cercul cu centrul în B și cu raza BC taie pe Δ în M și N. Să se demonstreze că MD și ND sunt înălțimi în triunghiul MCN.

GH. B.

Fie E intersecția lui CD cu Δ și F mijlocul lui AB. Prin construcție avem

$$(1) \quad BF = \frac{CD}{2}$$

iar E și B sunt respectiv piciorul înălțimii CDE și centrul cercului circumscris triunghiului MCN. Cum BF este mediatrice și paralelă cu CDE și cum avem relația (1) rezultă că D este ortocentrul triunghiului MCD căci se știe că într'un triunghi distanța dela un vârf la ortocentru este dublul distanței dela centrul cercului circumscris la latura opusă și reciproc, distanțele fiind convenabil alese.

Clasa VIII-a. Exerc. 467¹). Să se pună sub forma unui produs de trei factori de gradul întâi și unul de gradul al doilea, suma

$$\Sigma x(y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - a^2).$$

GH. B.

Desvoltând suma avem succesiv

$$\begin{aligned} & x(y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - a^2) + y(z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - a^2) + z(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - a^2) = \\ & x[y^4 - z^4 - a^2(y^2 - z^2)] + y[z^4 - x^4 - a^2(z^2 - x^2)] + z[x^4 - y^4 - a^2(x^2 - y^2)] = \\ & x(y^4 - z^4) + y(z^4 - x^4) + z(x^4 - y^4) - a^2(x - y)(y - z)(z - x) = \\ & (x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - a^2) \end{aligned}$$

1) Enunț rectificat.

VIII. 479. Fie A_1 mijlocul lui BC a triunghiului ABC și A' un punct pe mediatoarea A_1A' . Dacă x, y, z sunt distanțele lui A' la laturile BC, CA, AB , atunci

$$by - cz = x[ccosB - bcosC].$$

GH. B.

Din A' duc o paralelă la AC . Fie N și M proiecțiile lui A_1 pe această paralelă și pe AC . Pe figură se vede că

$$\begin{aligned} A_1M &= \frac{h_a}{2} = A_1N + NM = A_1N + y \\ \therefore y &= \frac{h_a}{2} - A_1N. \end{aligned} \quad (1)$$

Din triunghiul A_1NA' se scoate

$$A_1N = x \cos C$$

căci $\angle A_1A'N$ este suplimentar lui C . Înlocuiesc în (1) pe care o înmulțesc cu b și am

$$by = \frac{bh_a}{2} - xb \cos C = S - xb \cos C \quad (2)$$

S fiind suprafața triunghiului ABC . La fel se găsește

$$cz = S - xc \cos B \quad (3)$$

scăzând (3) din (2) se obține relația din enunț.

Până la 10 Decembrie s'au primit soluții bune la exercițiile propuse în Numerele 1, 2 și 3 dela *):

Liceul de fete „Carmen-Sylva” București.

Clasa VI-a: DAMIAN C. LUCIA (VI: 703, E. G.: 401, 4), IONESCU MARIETA (VI: 703, E. G.: 406, 8).

Clasa VII-a: AITEANU VIORICA (VII: 618, 20, 5), EPURE C. MARILENA (VII: 620, VIII: 497, 8), PETROV E. ANDREICA (VII: 496*, 8), SPĂTARU ELENA (VII: 623, 4, E. G.: 401).

Liceul „Oltea Doamna”, Iași.

Clasa IV-a: ALBU D. AURELIA (IV: 600, 2, 3, 7).

Clasa VIII-a: TEODORESCU G. OLGA (VIII: 504, 5, 6, 7).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul „Carmen Sylva“, Timișoara.

Clasa VII-a : CÂNDEA C. MIOARA (VII: 613*, 7, VIII: 497).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa III-a : DUMITRESCU F. S. (III: 188, V: 712, VI: 702, 3, 4).

Clasa VI-a : MIȘICU V. M. (VI: 694*, 5*, 6, 8, 702, 3, 4, E. G.: 411, 5).

Clasa VIII-a : IONIȚĂ M. C. (VIII: 505, 6, E. G.: 392, 4).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VII-a : PRIȘCU A. (VII: 627, 9, 30, 2).

Clasa VIII-a : MACHEDON A. D. (VIII: 504, 5),

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa VI-a : IONESCU G. T. (VI: 704), VERNESCU V. M. (VI: 703, 4).

Clasa VIII-a : VERNESCU V. N. (VIII: 504, 5, 6).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa V-a : IEȘAN ȘT. A. (V: 710, 2, VI: 703, 4).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI G. D. (III: 183, 8, E. G.: 397).

Clasa VII-a : ROMALO G. D. (VII: 623).

Clasa VIII-a : CORBARU A. D. (VIII: 495, 504, 9, E. G.: 401, 6), LAPTEV R. G. (VIII: 505, 6), LUPU N. A. (E. G.: 401), SENI C. (VIII: 502, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 6, E. G.: 395, 8, 9, 401, 6, 7, 9, 10, 1, 6).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa VI-a : TĂTĂRESCU E. D. (VI: 704).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VII-a : ARON I. G. (VII: 620, 1, 7).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa VII-a : CONSTANTINESCU I. E. (VIII: 496*, VII: 614*, E. G.: 391, 4, 7, 408), CRISTEA M. P. (VIII: 496*), MITROIU A. A. (VII: 623, 5), NICULESCU P. (E. G.: 401, 2), PASCU M. C. (VII: 623).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa VI-a : BĂLĂUȚĂ N. I. (VI: 702, 4).

Clasa VIII-a : POPESCU C. T. (VIII: 496, 500).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a : BOCIORT F. I. (V : 705, 9).

Clasa VIII-a : POPA T. T. (VII : 613, 20, 7, VIII : 498).

Liceul „Ferdinand I“ Bacău.

Clasa VI-a : FRÂNARU D. (VI : 694*, 8).

Clasa VII-a : IOSIPESCU E. P. (VII : 624, 5).

Liceul „Samuel Vulcan“ Beiuș.

Clasa V-a : SASU I. I. (V : 705, 9, 10, 2).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa IV-a : BADEA A. D. (IV : 607).

Clasa VIII-a : NETCU L. A. (VIII : 497, 8, 501, 4, 5).

Liceul „Dr. Ion Meșotă“, Brașov.

Clasa VII-a : STELIAN FLORICĂ (VII : 623).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa VI-a : NIȚU I. G. (VI : 703, 4).

Liceul „Știrbei-Vodă“, Călărași.

Clasa VII-a : DIMA N. Ș. (VII : 623), PETRESCU I. (E. G. : 392, 4, 401), RĂDULESCU N. (VII : 619, 23, 4, VIII : 498, E. G. : 401).

Liceul „D. B. Știrbey“, Câmpina.

Clasa VIII-a : TUDOSE C. I. (VIII : 504).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa VIII-a : MUSCELEANU D. (VIII : 495, 504, 6, E. G. : 392, 3).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a : BURGĂ A. A. (IV : 603, 7, E. G. : 392), MLAȘNIȚĂ M. (IV : 607), NIȚĂ A. N. (IV : 603, 7, E. G. : 392).

Clasa V-a : ÂNTACHE N. G. (V : 705), BEȘCHEA C. M. (V : 705), DIMITRIU M. M. (V : 705), DIMITRIU N. V. (V : 705), ROȘUȚ G. (V : 705).

Clasa VI-a : OLARU D. (VI : 704), VOINEA P. D. (E. G. : 399).

Clasa VII-a : ANTONIU I. I. (E. G. : 392), CONSTANTINESCU C. (VII : 624, VIII : 498), DINCULESCU N. (VIII : 498, E. G. : 392, 4, 7), FLORESCU I. C. (VIII : 497), HOREZEANU V. M. (VII : 498), POPESCU I. I. (VII : 624), RĂDULESCU N. G. (VII : 624).

Clasa VIII-a : ANTONESCU D. I. (VIII : 504, 5), BĂRBUNEANU V. V. (VIII : 504, 5), DIACONU D. A. (VIII : *504), GEORGESCU F. F. (VIII : 504), ILIESCU T. T. (VIII : 504), MATEESCU A. (VIII : 502, 4, 5, 6, 13, E. G. : 397, 404, 6, 7, 8), MIHAI N. (VIII : 504), MIHĂILEANU C. (E. G. : 392), MUSCELEANU V. I. (VIII : 495, 7, 8, 501, 4, 5), MOVANU P. (VIII : 495, 6, 502, 5, E. G. : 395, 7, 404, 7, 8), POPA P. E. (VIII : 504, 5), PAȘOI N. D. (VIII : 504, 5), POPESCU I. V. (VIII : 504), ȘERBAN P. (VIII : 504), STĂNICĂ G. (VIII : 505), ZAHARIA G. S. (VIII : 494, 5*, 504).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I^a, Craiova.

Clasa IV-a : COSTEA V. G. (IV : 600), CROITORU I. V. (IV : 601), GOGA P. (IV : 600, 1), GROSSU I. M. (IV : 600, 1), IOAN C. N. (IV : 600, 1), MILOȘ I. V. (IV : 600, 1), POPESCU I. N. (IV : 600, 1), POPOVICI C. H. (IV : 600, 1), SILVICĂ C. P. (IV : 600).

Clasa V-a : ANTACHE G. (V : 707*), BEȘCHEA M. (V : 707*), DIMITRIU V. (V : 707*), GRAMA M. (V : 707*), ROȘUȚ G. (V : 707, 9).

Clasa VI-a : ANTOHI S. V. (VI : 673, 4, 7), BUZNEA C. (VI : 673, 4, 7), CĂLDĂRARU Ș. (VI : 673, 4, 7), CAZACLIU G. A. (VI : 703), CHIVULESCU S. (VI : 673, 5, 7), FLOREA V. (VI : 673, 4, 7) GHERMAN G. A. (VI : 673, 5, 7), GUSTI E. Ș. (VI : 673, 4, 7), GUDUMAC V. (VI : 693*), HAMZESCU D. C. (VI : 673, 4, 7), HÂRZIU G. (VI : 673, 4, 7), IOAN G. C. (VI : 673, 4, 5, 6), IONESCU G. (VI : 673, 4, 5, 6, 7), LAZĂR ST. (VI : 693*), MAREȘ V. C. (VI : 673, 4, 5, 6), MATEEVICI P. (VI : 675, 83), MUSINSCHI A. (VI : 673, 5, 7), NICULESCU T. (VI : 673, 5, 6, 7), NIȚĂ R. G. (VI : 673, 5, 6, 7), PANĂ A. I. (VI : 673, 5, 6, 7), PAVELESCU N. (VI : 673, 4, 5, 7, 84), PETRESCU C. (VI : 673, 5, 6, 7), POPESCU M. (VI : 673, 4, 5, 6, 7) POPESCU S. (VI : 673, 4, 5, 6, 7), POPESCU S. O. (VI : 673, 4, 5, 6, 7), SBURLAN D. C. (VI : 673, 5, 7, 84), ȘTEFANOVSCI G. (VI : 673, 5, 6, 7), TĂTU R. (VI : 673, 5, 7, 84), VASILESCU L. (VI : 673, 4, 5, 6, 7), VASILIU G. M. (VI : 673, 4, 5, 6, 7), VOICU M. G. (VI : 675, 84).

Clasa VII-a : FLOREA N. (VII : 624, E. G. : 401, 4, 7), FILIP G. (VII : 562, E. G. : 406*, 7*), GRIGORIU I. M. (E. G. : 392).

Clasa VIII-a : CRISTEA C. (VIII : 496, 7, 8, 9, 501, E. G. : 399), FILIP G. (VIII : 496).

Colegiul Național „Carol I^a, Craiova.

Clasa VII-a : IONESCU F. P. (E. G. : 393, 4, 6, 7, 400, 8).

Liceul „Radu Negru“, Făgăraș.

Clasa VI-a : BALEA S. I. (VI : 703, 4, E. G. : 349*, 92, 6*, 7, 404, 6, 7). FÂNTÂNĂ N. (VI : 703, E. G. : 392, 3, 4), RALEA S. I. (E. G. : 391).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a : DONȚU G. G. (VII : 625, E. G. : 408).

Liceul „Național“, Iași.

Clasa VII-a: DIMITRIU T. (VII: 620, 3, 5).

Liceul Internat, Iași.

Clasa VII-a: EPURE I. (VII: 624, E. G. 401), EFTIMIE A. (VII: 625, VIII: 497, 8).

Clasa VIII-a: IVĂNESCU I. (VIII: 496, 7), MANOLACHE C. M. (VIII: 504, 5, 6, 8, E. G.: 395, 7, 404).

Liceul Militar, Iași.

Clasa IV-a: BÂRZESCU M. (IV: 606, E. G.: 392, 4, 5), CIUMAȘU (IV: 606, E. G.: 392, 3, 5, 7, 401). CIOBANU D. D. (E. G.: 392, 4, 5, 7), CIUREANU G. C. (IV: 606, E. G.: 395, 7, 401), NACHE D. D. (E. G.: 392, 5, 7, 408), PIRONCOF M. (IV: 606, E. G.: 395, 401), RADU C. (E. G.: 392, 3, 4, 5, 7), ȘTEFĂNESCU A. (IV: 606), RUSU T. N. (IV: 584).

Clasa V-a: BEJAN G. (V: 710), BRIGHIU C. (V: 710), COSMIȚĂ I. F. (V: 710), EDU C. (V: 712), MIHAIL E. (V: 712), MIRCEA G. I. (V: 710, 2), PĂSTRĂVANU G. T. (V: 710), ROLICA Z. (V: 710), ROȘU I. N. (V: 712), SBURLAN D. A. (V: 710), ȘOVA M. (V: 710, 2), VINTILĂ C. (V: 710, 2), ZAITA A. G. (V: 710).

Clasa VI-a: BOSINCEANU C. C. (VI: 693), IONESCU M. (VI: 693).

Clasa VIII-a: DRĂGHICESCU P. P. (VIII: 497, 8, 502, 4, 5, 6, 7), DIMITRIU C. R. (VIII: 504, 5), IVĂNESCU C. I. (E. G.: 392, 3, 4, 5, 7), MANOLIU V. (VIII: 504, 5), ZAMFIR I. (VIII: 504).

Liceul „Petru Rareș“, Piatra-Neamț.

Clasa VII-a: DOBRESCU E. (VII: 623, VIII: 497).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploiești.

Clasa VI-a: ȘTEFĂNESCU T. (VI: 703, 4, VII: 622, VIII: 497).

Clasa VII-a: CĂTUNEANU T. (E. G.: 407), MOTOIU G. C. (VII: 625, E. G.: 406).

Colegiul Național „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa VII-a: STOIANOVICI T. Ș. (VII: 620).

Liceul „Regele Ferdinand“, Râmnicul-Sărat.

Clasa VIII-a: DEȘLIU I. (VIII: 504).

Liceul „Al. Lahovary“, Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VIII-a: ANDREESCU G. I. (VIII: 502, 4, 5), BOERESCU D. (VIII: 504, 6).

Liceul „Radu Greceanu“, Slatina.

Clasa VIII-a: ZEVELEANU G. C. (VIII: 495, 504, 5, 6, 7).

Liceul Militar, Timișoara.

Clasa V-a: CHIRIAC N. V. (V: 705, 9), NEDELCU U. (V: 705, 9, 12), ȘTEFĂNESCU S. G. (V: 705), ȘTRATI I. I. (V: 705, 9), SEICEANU C. (V: 705), TODIRICĂ N. (V: 705, 12).

Clasa VI-a: BALAȘ O. (VI: 703), CERGĂU L. (VI: 703, 4), CĂPRIȚĂ G. I. (VI: 703, 4), CHINARIN I. O. (VI: 703, 4), ENĂCHESCU I. (VI: 698, 703, 4, VII: 623, VIII, 497, 8, E. G.: 399), IUNCAN P. M. (VI: 703), MIHALCU I. I. (VI: 698, 703, 4), MOAȘA G. (VI: 704), RIZAN V. C. (VI: 703, 4), ROȘOGA I. M. (VI: 703).

Clasa VII-a: DRAGOMIR M. M. (VII: 620), IONESCU C. M. (VII: 620), MATEUCĂ G. F. (VII: 620), OPREA D. G. (VII: 620, 4, E. G.: 401, 4*), PETRESCU E. (E. G.: 401, 4, 6), PETRESCU I. S. (VII: 620).

Clasa VIII-a: BARANGA G. (VIII: 504), COMAN I. L. (VIII: 504).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa VII-a: RĂDOIU N. N. (VII: 616).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa V-a: BIRIȘTEICĂ P. (V: 712).

Clasa VII-a: CARAMALAIR V. E. (VII: 620), ROVENȚA I. C. (VII: 620).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa VI-a: GÂȚĂ G. G. (VI: 703, 4, E. G.: 392).

Clasa VIII-a: DĂRĂU C. C. (VIII: 516).

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1942

Clasa III-a. Exerc. 192. Fie date cercul (O) cu raza R și un punct A la distanța $\overline{AO} = 2R$ de centrul O. Insemnăm cu B, C punctele unde segmentul AO și prelungirea lui taie respectiv cercul (O). Pe $\overline{AC}$, ca diametru, construim cercul (I), apoi construim tangenta $\overline{AT}$ la cercul O și însemnăm cu P punctul unde prelungirea lui $\overline{AT}$ taie cercul (I). Fie încă S, unde coarda PC taie

cercul (O), iar M unde perpendiculara PN pe AC taie același cerc (O). Să se calculeze în mai multe feluri (dacă e posibil) segmentele :

$$\overline{AT} ; \overline{AP} ; \overline{OP} ; \overline{ON} ; \overline{MP} ; \overline{SP}.$$

O. N. Ț.

III. 193. Intr'un cerc (O) este înscris un dreptunghi ABCD ($\overline{AB} < \overline{BC}$). Cercul cu centrul în A și cu raza $\overline{AD}$ taie a doua oară cercul O în M; dreapta MD taie pe CB și CA respectiv în P și N.

Să se arate, că:

$$\overline{NP} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC} \cdot \overline{CB}} ; \quad \overline{MP} = \frac{\overline{AB} (\overline{CB}^2 - \overline{AB}^2)}{\overline{AC} \cdot \overline{CB}}.$$

O. N. Ț.

III. 194. Fie dreptunghiul ABCD ($\overline{AB} < \overline{BC}$). Cercul construit pe $\overline{AB}$ ca diametru taie diagonala $\overline{AC}$ în M, iar dreapta DM taie pe AB în N.

Să se arate, că:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 \cdot \overline{BC}^2} \cdot \sqrt{\overline{AB}^6 + \overline{BC}^6}.$$

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 612. Fie un paralelipiped dreptunghi ABCDEFGH și planul său diagonal ADHG.

În mijlocul M al muchiei $\overline{AD}$ ridicăm o perpendiculară pe această muchie, înțepând baza EFGH în N și astfel că $\overline{MN} = 2 \overline{AF}$.

Să se arate că distanța d a punctului N la planul diagonal ADHG este egală cu

$$\overline{AF} \cdot \frac{\overline{AB} - \overline{AF} \sqrt{3}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AF}^2}}.$$

O. N. Ț.

IV. 613. Fie un paralelipiped dreptunghiu ABCDEFGH. Pe muchiile $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AH}$ luăm respectiv punctele

$$B_1, B_2, B_3 ; D_1, D_2, D_3 ; H_1, H_2, H_3$$

astfel ca:

$$\overline{AB_1} = 2 \overline{B_1 B_2} = 3 \overline{B_2 B_3} ; \overline{AD_1} = 2 \overline{D_1 D_2} = 3 \overline{D_2 D_3} ;$$

$$\overline{AH_1} = 2 \overline{H_1 H_2} = 3 \overline{H_2 H_3}.$$

Planele $B_1 D_1 H_1$, $B_2 D_2 H_2$, $B_3 D_3 H_3$ sunt înțepate de diagonala AF a paralelipipedului respectiv în punctele M_1 , M_2 , M_3 . Să se găsească lungimile segmentelor: $\overline{AM_1}$, $\overline{AM_2}$, $\overline{AM_3}$.

O. N. Ț.

IV. 614. Fie un plan (P) și o perpendiculară OL în punctul O pe acest plan. Prin O și în planul (P) ducem două segmente $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ ($b < a$), perpendiculare între ele. Prolungim segmentul $\overline{AB}$ cu $\overline{BB_2} = \overline{AB}$. Cercul cu centrul în O și raza $\overline{OB}$ taie pe $\overline{OA}$ și prelungirea lui respectiv în A_1 și A_2 ; cercul $B_2 A_2 A_1$ taie pe $\overline{AB}$ în B_1 . Măsurăm pe OL segmentul $\overline{OC} = \overline{AB_1}$. Să se arate, că:

1. Triunghiul CAB este echivalent cu triunghiul dreptunghiu isoscel construit pe $\overline{AB}$ ca ipotenuză;
2. Dacă H este proiecția lui O pe $\overline{AB}$, avem relația:

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \overline{OH}^2 = \left(\frac{\overline{AB} \sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

O. N. Ț.

IV. 615. Fie un plan (P), o perpendiculară OL în punctul O pe acest plan, două segmente

$$\overline{OA} = \frac{2a}{a^2 - b^2}, \quad \overline{OB} = \frac{2b}{a^2 - b^2},$$

luate în planul (P) și perpendiculare între ele (a, b fiind două lungimi date). Măsurăm pe OL segmentul $\overline{OC} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Să se calculeze (fără a întrebuiți formula volumului piramidei) distanța planului ABC la punctul O.

(N. B. Vor fi luate după voie lungimile a, b și vor fi construite exact, fixând unitatea, lungimile $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$).

O. N. Ț.

Clasa V-a. Exerc. 720. Să se rezolve sistemele:

$$1. \quad bx - cy = 0 \quad ; \quad \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1.$$

$$2. \quad bcx + (2b^2 + c^2)y - b^2c = 0; \quad (b^2 + 2c^2)x + bcy - bc^2 = 0.$$

N. M.

V. 721. Să se arate că

$$\sum x_2 x_3 (x_2 - x_3)^2 = \sum x_1 (x_2 - x_3)^2 (x_2 + x_3 - x_1),$$

termenii celor două sume obținându-se permutând circular indicii 1, 2, 3.

N. M.

V. 722. Prin un punct O ducem trei drepte D_1, D_2, D_3 . Luăm un punct A pe D_1 ; paralela din A la D_3 taie pe D_2 în B; paralela din B la D_1 taie pe D_3 în C și așa mai departe, obținând punctele D, E, F, G. Să se arate, că :

1. G coincide cu A, formându-se un exagon admitând pe O drept centru de simetrie;

2. Dacă începem cu paralela din A la D_2 găsim același exagon;

3. Oricare ar fi dreptele D_2, D_3 , punctul D este același;

4. Ducem prin O încă o dreaptă L, ceea ce ne conduce la două exagoane nouă $AB'C'DE'F'$ și $AB''C''DE''F''$. Triunghiurile $BB'B'', CC'C''$ sunt egale.

N. M.

V. 723. Fie N un punct pe cercul de diametru $\overline{AB}$ și M intersecția lui AN cu tangenta în B la cerc. Dreapta care unește pe N cu mijlocul lui $\overline{BM}$ este tangentă la cerc.

GH. B.

V. 724. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O; B' diametralul lui B; A' intersecția lui O cu înălțimea AH; M pe AH așa încât $\overline{AM} = \overline{A'H}$ și H ortocentrul triunghiului. Să se arate că B'M este paralelă cu BC.

GH. B.

Clasa VI-a. Exerc. 711. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt[x]{a} - ab\sqrt[\frac{1}{x}]{b} = 0.$$

G. D. S.

VI. 712. Să se stabilească relația:

$$\begin{aligned} \cos\left(a + \frac{5b}{2}\right) - 3\cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) + 4\cos\left(a + \frac{b}{2}\right) - 2\cos a \cos \frac{b}{2} \\ \equiv 8\sin \frac{3b}{2} \sin(a + b). \end{aligned}$$

G. D. S.

VI. 713. Fie dreptunghiul ABCD în care $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$. Ducem AP perpendicular pe BD și notăm cu O centrul dreptunghiului. Știind că $\widehat{OAP} = \theta$, să se demonstreze relația:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

GH. D.

VI. 714. Fie ABCDE un pentagon convex în care:

$$\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ, \overline{CB} = \overline{ED} = 84, \overline{CD} = 13, \overline{AB} = 12, \overline{AE} = 5.$$

Se cere să se afle liniile trigonometrice ale unghiurilor ABC, AEC și lungimea segmentului AC.

GH. D.

VI. 715. Fie paralelipipedul dreptunghiu ABCDEFGH și baza EFGH și x, y, z respectiv unghiurile sub care sunt văzute muchiile $\overline{AF}, \overline{DE}, \overline{CH}$ din vârful G.

Să se arate că avem relația:

$$\cotg^2 y = \cotg^2 x + \cotg^2 z.$$

O. N. Ț.

VI. 716. Fie paralelipipedul drept ABCDEFGH cu baza EFGH având unghiul $GFE = \alpha$ și fie x, y, z respectiv unghiurile sub care sunt văzute muchiile $\overline{AF}, \overline{DE}, \overline{CH}$ din vârful G.

Să se arate că avem relația:

$$\cotg^2 y = \cotg^2 x + \cotg^2 z - 2 \cotg x \cotg z \cos \alpha.$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 634. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & a+b+2 \\ b & a+b+2 & a \\ a+b+2 & a & b \end{vmatrix},$$

apoi să se înlocuiască fiecare element prin minorul său și să se calculeze determinantul obținut astfel.

C. I. B.

VII. 635. Să se găsească punctul M de pe curba

$$y = \frac{1 - \sqrt{\sin 2x}}{1 + \sqrt[3]{\cos 4x}},$$

care are abscisa $x = \frac{\pi}{4}$ și tangenta unghiului pe care îl face tangenta geometrică în punctul M, la această curbă, cu axa $x'x$.

O. N. Ț.

VII. 636. Să se rezolve și să se discute sistemul de ecuații

$$x + y \sin \alpha + z \sin \beta = 1$$

$$x \sin \alpha + y + z \sin \gamma = 1$$

$$x \sin \beta + y \sin \gamma + z = 1.$$

Făcând $\gamma = \beta = \alpha$, să se găsească limita valorilor lui x, y, z când α tinde către $\frac{\pi}{2}$.

O. N. Ț.

VII. 637. Să se determine soluțiile pozitive ale sistemului

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + z = 0$$

$$x \sin \beta - y \cos \beta + z = 0$$

astfel ca să avem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

O. N. Ț.

VII. 638. Să se calculeze derivata de ordinul 3 a funcțiunii

$$y = \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n} \right)^n.$$

C. I. B.

VII. 639. Să se calculeze derivata de ordinul 3 a funcțiunii

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x - \frac{3}{4} \sin^2 x - 1.$$

C. I. B.

VII. 640. Să se afle derivata funcțiunii

$$y = \frac{\sin 2x - 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}{\cos 2x + 2x \sin 2x - 2x^2 \cos 2x}.$$

C. I. B.

Clasa VIII-a. Exerc. 518. Se dă curba

$$y = \frac{\sqrt{x+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{x+1}} \quad (\lambda > 0)$$

și fie M punctul unde curba taie axa OY.

1. Când λ variază, curba rămâne tangentă dreptei $y = 2$.
2. Tangenta la curbă în punctul M este în același timp tangentă cercului cu raza $R = 2$ și cu centrul în origină.
3. Să se determine λ astfel ca aria cuprinsă între curbă și dreapta $y = \frac{5}{2}$ să fie de 18 unități de suprafață.

G. D. S.

VIII. 519. Se dau punctele A(1, 5), B(2, 4), C(5, 1). Dacă

$$\Delta_1(y, x) = 0, \quad \Delta_2(x, y) = 0, \quad \Delta_3(x, y) = 0$$

sunt ecuațiile laturilor triunghiului ABC, să se cerceteze semnul expresiei $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ pentru punctele situate în interiorul triunghiului.

C. I. B.

VIII. 520. Se dau axele dreptunghiulare xoy și punctele A, B în planul lor. Fie A' simetricul lui A față de OX și B' simetricul lui B față de OY. Dreapta A'B' întâlnește pe OX în M și pe OY în N. Să se arate că AM și BN sunt paralele.

GH. B.

VIII. 521. Axul radical a două cercuri are ca ecuație

$$mx + ny + p = 0.$$

Să se demonstreze că aria triunghiului, format de acest ax radical și cele două bisectoare ale axelor de coordonate, este dată de formula

$$S = \frac{p^2}{m^2 - n^2}.$$

GH. D.

VIII. 522. Fie un cerc (O) de rază R și un punct A pe acest cerc. Două cercuri (O') și (O'') trec prin punctul A, având dreapta centrelor O'O'' perpendiculară pe OA și tăindu-se a doua oară în P. Fie M și N punctele unde cercurile (O') și (O'') taie respectiv a doua oară cercul (O). Să se găsească condiția pentru ca punctul A să fie centrul distanțelor proporționale al punctelor M, N, P.

O. N. Ț.

VIII. 523. Să se scrie ecuația unui cerc tangent dreptelor

$$x + 5y - 2 = 0, \quad 5x - y + 3 = 0$$

și al cărui centru se află pe dreapta $x + y - a = 0$.

- Determinați pe a astfel ca suprafața cercului să fie πR^2 .

C. I. B.

VIII. 524. Să se calculeze

$$\int \frac{x dx}{x^2 + x + 4}.$$

C. I. B.

VIII. 525. Să se calculeze

$$\int (x^3 + 2x^2 + 3x + 4) e^x dx.$$

C. I. B.

Exerciții Generale. *Exerc. 418.* Câte numere mai mici ca 200 și mai mari ca 100, împărțite cu 7 dau restul 3?

I. L.

E. G. 419. Unui număr oarecare de patru cifre i se adună cifrele și se obține numărul format de cifrele extreme. Câte soluții putem avea?

I. L.

E. G. 420. Un vas de 12 litri este plin cu vin. Să se puie 4 litri din această cantitate într'un vas de 7 litri cu ajutorul unui vas de 5 litri.

I. L.

E. G. 421. Cunoscând două numere și produsul lor, cum putem afla produsul complementelor lor fără a face înmulțire?

I. L.

E. G. 422. Dacă un număr scris în sistemul cu baza 2B se termină cu cifra B, atunci patrutul lui se obține înmulțind numărul rezultat din numărul dat, prin suprimarea ultimei cifre și înmulțit cu numărul imediat următor lui.

I. L.

E. G. 423. Împărțind numerele 1895 și 1941, cu același număr, găsim același rest. Care este împărțitorul?

I. L.

E. G. 424. Care este cel mai mic număr de forma $3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, al cărui cub are de cinci ori mai mulți divizori decât el?

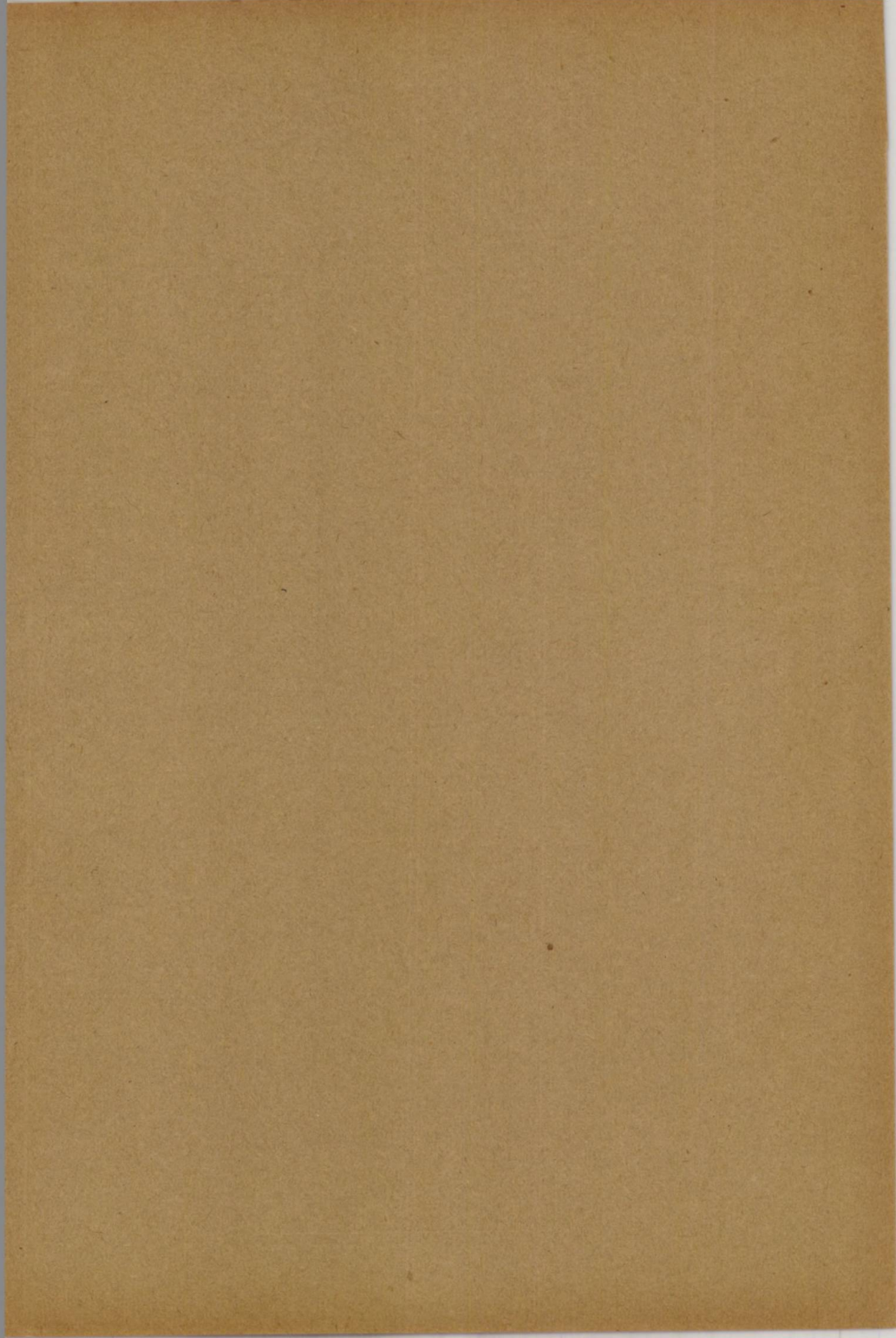
I. L.

E. G. 425. Trei numere prime cu 5, divizate cu el, dau resturi diferite. Să se arate că suma acelor trei numere nu se poate divide niciodată cu 5.

I. L.

E. G. 426. Să se arate că, dacă sporim deîmpărțitul și împărțitorul cu un număr α , și dacă micșorăm câtul cu același număr, restul rămânând neschimbat, atunci câtul este totdeauna mai mare decât împărțitorul, iar diferența lor are valoarea $(\alpha + 1)$.

I. L.



INSTRUCTIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. N. Abramescu, *Leccióni elementare de Algebră superioară*, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și
G. Titelca, Vocabular Matematic

X. G. Titeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
--	---------

XI. *Gazeta Matematică* 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar

(500 pag.)	{	pentru particulari	Lei 200
		pentru abonatii G M si S G M	Lei 150

XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de *Gh. Th. Ciheorghiu*. Lei 95

XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională Lei 190

XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Editia II-a revizuită și adăugită de Gh. Th.

XV. A. G. Ioachimescu. Culegere de Probleme de Algebră. Partea

Ediția IV-a revizuită și mărită. Lei 120

Ediția 11-a, adăogită de N. G. Botea Lei 140

Ediția IV-a, revăzută și mărită Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui Euclid.* (Cărtile I — VI de Geometrie plană) tradusă
din limba greacă de V. Marian

11. **Elementele lui Euclid.** (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irrationalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 250

II. *Elementele lui Euclid*. (Cărtile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPISICLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marlan** Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE TITEICA”

1. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* Lei 135

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică — Calea Grivitei No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL VIII. No. 5

1 FEBRUARIE 1942



SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 5

1 FEBRUARIE 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCITII REZOLVATE

Exerciții Generale. *Exerc. 351. Nu există numere de cinci cifre de formele $abcba$ și $defed$ așa ca unul să fie multiplul celuilalt?*

GH. B.

La întrebarea din enunț vom presupune că literele diferite înseamnă cifre diferite. Fie m un număr întreg așa încât

$$(1) \quad abcba = m \times defed.$$

Pentru a avea această egalitate trebuie ca din înmulțire să obținem simultan

$$(2) \quad m \times d = 10\alpha + a \quad \text{cu} \quad 0 \leq \alpha \leq 8$$

$$(3) \quad m \times d + \beta = a \quad \text{cu} \quad 0 \leq \beta \leq 8.$$

Din (1) și (2) se deduce

$$10\alpha + \beta = 0$$

care nu are loc decât dacă $\alpha = \beta = 0$. Fie acum $m = 2$ conform celor precedente $2 \times d < 10$ deci putem avea

d	1	2	3	4
a	2	4	6	8

Luăm $a = 2$, $d = 1$ înlocuim în (1) și găsim

$$bcb = 2 \times efe$$

care duce la $2e = b$, $2f = c$. Facem tablouri ca precedentul și găsim soluțiile

$$26862 = 2 \times 13431 \quad ; \quad 28682 = 2 \times 14341 ;$$

$$82628 = 2 \times 41314 \quad ; \quad 86268 = 2 \times 43134.$$

Continuând la fel, găsim că pentru $m > 3$ nu mai avem soluții. Deci răspunsul la enunț este că există 5 numere în condițiile (1).

Până la 1 Ianuarie s'au primit soluții dela *):

Liceul de fete „Carmen-Sylva“, București.

Clasa VI-a: IONESCU G. MARIETTA (VI: 696).

Clasa VII-a: DAMIAN C. CORNELIA (VII: 632), IONESCU T. VIRGINIA (VII: 632), SPĂTARU N. ELENA (VII: 622, 32), VARVERI GABRIELA (VII: 622, 13, 4).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa VI-a: MĂNESCU MARGARETA (VII: 703, 4).

Institutul de fete „Sf. Maria“, București.

Clasa VI-a: ODOBEȘTIANU R. FRANCE (VI: 703, 4).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu“, București.

Clasa VIII-a: GHIATĂ S. FELICIA (VIII: 497), STOIA N. SILVIA (VIII: 504).

Liceul de fete „Zoe Râmniceanu“, București.

Clasa V-a: MATEESCU P. MIHAELA (V: 710, 1, 2, 4, 6, 7, 8).

Clasa VI-a: ENACHE C. E. (VI: 693, 5, 6).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa V-a: ALEXE C. MAGDALENA (V: 706, 9, 10).

Liceul de fete „Santa Maria“, Brăila.

Clasa VIII-a: COLGIU I. SILVIA (VIII: 502, 4, 5, 16).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa VIII-a: PUȚUREANU C. ELENA (VIII: 495).

Gimnaziul „Iulia Hașdeu“, Hotin.

Clasa IV-a: DUBCEAC P. LUDMILA (IV: 603).

Liceul „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa IV-a: ALBU D. AURELIA (IV: 603, 7, 10, 1), ANDREIAN CABIRIA (IV: 600, 1, 2, 3).

Clasa VII-a: MUNTEANU I. DORINA (VII: 622, 3, 5).

Clasa VIII-a: POPOVICI I. FLORICA (VIII: 504, 5, 6, 7).

Liceul de fete „Despina Doamna“, Ploiești.

Clasa VI-a: BOCA C. STELICA (VI: 704).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul „Elena Cuza“.

Clasa VIII-a: PUȚUREANU C. ELENA (VIII: 496, 504, 5).

Fără indicație de liceu.

Clasa IV-a: VERJAC SERAFIMA (IV: 610).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa IV-a: BARBAIANI MIHAI (IV: 603, V: 693, 707), POPESCU C. L. (IV: 603).

Clasa V-a: BARBAIANI M. (V: 705, E. G.: 391), DUMITRESCU ST. V. (V: 705, 9).

Clasa VI-a: GRIGORESCU G. C. (VI: 703), DAN G. M. (VI: 703, 4).

Clasa VIII-a: DAN G. G. (VIII: 504, 5, 6), MĂRESCU GH. I. (VIII: 496, 504, 5, 6), POPESCU C. T. (VIII: 497, 8, 9, 501).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa VII-a: EMIL I. CONSTANTIN (VII: 615, 6, 7, 8, VIII: 497, E. G.: 398, 9), ROVENȚA G. I. (VII: 632, E. G.: 391), CONSTANTINESCU I. M. (VII: 616, 8), NICOLESCU I. P. (VII: 615, 6, 8, 32, VIII: 496), PASCU M. C. (VII: 614, 9, 32, VIII: 495, 7).

Clasa VIII-a: IOSIPESCU C. IOAN-PETRU (VIII: 505).

Liceul „Marele Voevod Mihai“, București.

Clasa VI-a: BURGHELEA M. N. (VI: 703).

Clasa VII-a: BRATU I. E. (VII: 620, 2, 3, 4, 7, 31, 2, VIII: 496, 9).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VII-a: ARON I. GH. (VII: 497, 622, 24, 23).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa IV-a: TINIȘ A. D. (IV: 600, 3, 6, 7, 8, 10, 1).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa VIII-a: BÂRSAN GH. P. (VIII: 496, 8, 506).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VII-a: PRIȘCU R. A. (VII: 614, 24).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa V-a: GEORGEACOPOL F. D. (V: 709, 10, 4).

Clasa VI-a: BĂLCU ST. N. (VI: 693, 94, 95), GHEORGHE GH. NICOLAE (VI: 695), HORBUNIEV P. V. (VI: 693, 4, 5, 8, 703, 4), MIHALACHE N. (VI: 702), NEGULAU G. G. (VI: 703).

Clasa VII-a: SORESCU P. S. (VII: 620, 2, 5, 7, 32, 3), BOTEZ V. R. (VII: 496, 501, 14, 5, 6).

Clasa VIII-a: CONSTANTIN M. IONIȚĂ (VIII: 504), IONESCU I. GR. (VIII: 496, 7, 507, E. G.: 398, 9), NODOLU G. (VIII: 496, 504, 5).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a: SENI GH. D. (III: 184, 9).

Clasa V-a: PĂUNESCU C. V. (V: 705, 7, 9, 10, 1, 2, 4).

Clasa VII-a: GRIGORIU N. N. (VII: 618, 9), ROMALO O. (VII: 627), TĂNĂ-
SESCU G. V. (VII: 622, 3, VIII: 497).

Clasa VIII-a: LUPU N. A. (VIII: 516), CORBARU A. D. (VIII: 516),
SENI C. (VIII: 508, 17, E. G.: 391), MARINESCU V. (VIII: 496, 8, 9, 501, 4,
5, 6, E. G.: 398).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa V-a: MUNTEANU I. V. (V: 709).

Liceul „Barbu Delavrancea“.

Clasa VI-a: GHICOR G. O. (VI: 702, 3, 4).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a: SCHIOPU R. I. (V: 705, 7, 9, 10, 2).

Clasa VII-a: POPA T. T. (VII: 627, 32), NISTOR I. I. particular (VII:
622, 3, 7, VIII: 496).

Liceul „Ferdinand I“, Bacău.

Clasa VI-a: FÂNARU N. D. (VI: 693, 5, 702, 3, 4, E. G.: 39).

Liceul „Samuil Vulcan“, Beiuș-Bihor.

Clasa V-a: GOLDIȘ T. G. (V: 709, 10, 2), SASU T. I. (V: 710, 4, VI:
704, VII: 618, VIII: 496), LOGOFĂTU M. T. (V: 705, 9, 10, 2).

Liceul „N. Bălcescu“, Brăila.

Clasa V-a: BOERESCU I. C. (V: 705, 12, 4, 8, VI: 693, 4, 703, 4, 7,
VIII: 496, E. G.: 391).

Clasa VI-a: PĂIȘ V. M. (VII: 622, 3, 4, 5, 32, VIII: 497, 8).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa VIII-a: NETCU A. (VIII: 506, 16).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă“, Brașov.

Clasa VII-a: GEORGESCU M. (VII: 622), FLORICĂ ST. (VII: 623).

Liceul „B. P. Hașdeu“, Buzău.

Clasa VI-a: PETCULESCU D. M. (VI: 694, 703, 4).

Colegiul Național „Carol I“, Craiova.

Clasa VIII-a: IONESCU N. FL. (VIII: 409, 505, 6, 7, 15, E. G.: 406), FLORESCU I. N. (VIII: 501, 4, 5).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I“, Craiova.

Clasa V-a: BARBĂLATĂ C. (V: 705, 10).

Clasa VI-a: CHIRILEANU ȘT. TR. (VIII: 502), PĂSLĂRAȘU P. C. (VI: 704), ȘTEFĂNESCU P. (VI: 702, 4).

Clasa VIII-a: MATEESCU A. (E. G.: 391), SIMION G. Z. (E. G.: 391).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a: BURGĂ AL. AL. (IV: 607, E. G.: 404, 8), MIHĂILEANU G. C. (IV: 603).

Clasa VII-a: TOMESCU N. AL. (VII: 624), BRATU N. I. (VII: 625), CODRES I. IONICENȚIU (VIII: 497), GHINEA N. M. (VIII: 498), HUREZEANU V. M. (VII: 624), INDUȚĂ TR. (VIII: 498), MARINESCU D. J. (VIII: 498), PĂSĂRICĂ C. VICTOR (VIII: 498), POLIZU ALEX. AL. (VIII: 497, 8), RĂDULESCU HR. I. (VIII: 497, 8), STREINU I. M. (VIII: 498), VILAIA I. GH. (VII: 624, VIII: 498).

Clasa VIII-a: MUSCELEANU I. (VIII: 502, 3).

Liceul Militar, Cernăuți.

Clasa VI-a: CIMBRU M. (VI: 693, 4, 5, 703, 4), POPESCU A. N. (VI: 694, 703, 4), CÎRICANU C. (VI: 703, 4), STAICU C. (VI: 694, 703, 4).

Liceul „Aron Pumnul“, Cernăuți.

Clasa VIII-a: DIACON ALEX. (VIII: 496, 7, 8, 500, 1, E. G.: 391. 8, 9*).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa VIII-a: MUSCELEANU DORU (VIII: 497, 502, 7, 16, E. G.: 399).

Liceul „Știrbey Vodă“, Călărași-Ialomița.

Clasa VIII-a: TOMA I. A. (VIII: 504, 5, 16), RĂDULESCU GH. (VIII: 505).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Câmpulung-Muscel.

Clasa IV-a: CHEȘCĂ N. I. (IV: 603, 7), JEMNA I. (IV: 603, 7), MARINESCU C. S. (IV: 603, 7), SILIȘTEANU D. D. (IV: 603, 7), TEODORESCU I. G. (IV: 603, 7).

Liceul „Ion Maiorescu“, Giurgiu.

Clasa V-a: BOCĂRNEA C. (E. G.: 391).

Liceul Internat, Iași.

Clasa VII-a: EFTIMIE G. A. (VII: 627), MOISE I. (VII: 613), SPIRIDO-NEANU E. M. (E. G.: 398*), STOICA I. I. (E. G.: 401).

Liceul Militar, Iași.

Clasa IV-a: STAN G. C. (IV: 606).

Clasa V-a: COȘNIȚĂ I. F. (V: 712), BĂDĂRCĂ I. (V: 712), LOLESCU I. N. (V: 710, 2), ZAHARIA N. (V: 705).

Clasa VI-a: ANDREESCU M. (VI: 707), ANDREI A. (VI: 707), BOSINCEANU C. (VI: 707), COROI I. D. (VI: 698, 707), TURCULEȚ T. (VI: 707).

Clasa VII-a: BĂDULESCU M. (VII: 620, 7), BUCUR N. G. (VII: 627), CĂRUNTE F. (VII: 620), IFTODE C. (VII: 620), LUPAȘCU D. S. (VII: 628), MILEA C. (VII: 620, 7).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a: DONȚU G. G. (VII: 613, 6, 27), STOICA L. I. (VII: 613).

Colegiul Național „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa III-a: BADEA I. M. (III: 183), CONSTANTIN V. (III: 183, 4), POPESCU A. (III: 183).

Clasa V-a: BALABAN E. (V: 707, 12), BULANDRA C. (V: 705, 7, 12), COLUMBEANU (V: 705, 12), DEMETRESCU P. O. (V: 707, 12), DOMBROVSCI V. (V: 712, 4), FRĂȚIANU L. (V: 712), GHITĂ M. V. (V: 705, 7, 12, 4), MARINESCU M. (V: 714), MARINESCU M. (V: 705, 7, 12), LUPOIU I. R. (V: 707, 12), IONESCU I. J. (V: 707), PITIȘ L. N. (V: 707, 12, 4), COLUMBEANU P. (V: 707, 9, 14), POJOGEANU M. (V: 707, 12), TRANDAFIR GH. M. (V: 707), IONESCU V. N. (V: 712, 4), VÂRTEJEANU E. GH. MARCEL (V: 707, 14).

Clasa VI-a: ALEXIU N. (VI: 702, 3), BALABAN I. (VI: 702, 3, 4), BERBERIANU T. A. (VI: 702, 3, 4), BĂDILESCU E. (VI: 702, 3, 4), BĂLĂNESCU GH. (VI: 702, 3, 4), CORTUȘANU C. J. (VI: 702, 3, 4), COSTESCU N. (VI: 702, 3), CREȚU A. (VI: 702, 3), DINESCU A. I. (VI: 702, 3, 4), GAIN E. C. (VI: 702, 3, 4), GRECULESCU TIB. (VI: 702, 3, 4), ILIE I. GH. (VI: 702, 3), ILIESCU C. (VI: 701, 2, 3, 4), IONESCU V. (VI: 702, 3, 4), MITĂCHESCU P. (VI: 702, 3, 4), MOSCU T. (VI: 702, 3, 4), NEGULESCU D. C. (VI: 702, 3, 4), ONCESCU C. M. (VI: 703), PAROTĂ I. P. (VI: 702, 3, 4), POSTELNICU G. M. (VI: 702, 3, 4), POPESCU G. N. (702, 3, 4), PURICA I. I. (VI: 702, 3), PETRESCU C. (VI: 702, 3, 4), RAINU A. I. (VI: 702, 3, 4), ROȘU-BUZESCU MIRCEA (VI: 702, 3, 4, VII: 622), RAICANU A. (VI: 702, 3, 4), SORIN N. GEORGESCU (VI: 702, 3, 4), TĂNĂȘESCU C. (VI: 702, 3), FĂȘIE V. M. (VI: 702, 3, 4), TEODORESCU V. (VI: 702, 3, 4), TURTOESCU L. (VI: 702, 3, 4), VOICULESCU T. M. (VI: 702, 3, 4).

Clasa VII-a: BORBICI A. L. (VII: 622), BUNESCU N. GH. (VII: 622), BURȘ L. (VII: 622, 3, 5), CELUȘELU E. (VII: 622, 3, 4), COLUMBEANU L. (VII: 622, 3, 5), DRĂGULESCU V. D. (VII: 622, 3), DOBROVICESCU C. (VII: 624), FILIPESCU T. M. (VII: 622, 3), GHEORGHIU M. (VII: 623), IONESCU B. (VII: 622, 3), MILIȚIU T. G. (VII: 622, 3), NEAGU M. (VII: 622), NICOLAE C. A. (VII: 622, 3, 5), NICULESCU C. (VII: 622, 3), NOGACEWSCHI I. (VII: 622, 3), PÂRLIGA

LT. T. (VII: 622, 3), POPESCU P. DAN (VII: 622, 3), STOIANOVII I. ȘERBAN (VII: 613, 4, 5, 8, 23, 4, VIII: 496, 7, 8, E. G.: 398*), STROE R. GH. (VII: 622, 3), ȚINCULESCU G. N. (VII: 622, 3), VLĂDOIANU T. R. (VII: 622).

Clasa VIII-a: AVRENDT R. E. (VIII: 507, 9), ALDEA V. V. (VIII: 504, 7), FLOREȘTEANU D. AL. (VIII: 504, 6, 7, 9, E. G.: 401), GHEORGHE M. (VIII: 507, 9), HRISTESCU I. I. (VIII: 507), LUNGU I. MELUȘ-TR. (VIII: 504, 5, 6, 7, 9), MARINESCU G. O. (VIII: 507), VASILE M. BENEVENTUS (VIII: 507, 8).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploești.

Clasa V-a: CESULESCU C. F. (V: 707, 9, 12, 4).

Clasa VI-a: ȘTEFĂNESCU BUJOR T. (VI: 702, VII: 616).

Clasa VII-a: CĂTUNEANU T. (VII: 613), MOȚOIU S. C. (VII: 627).

Clasa VIII-a: BUCUREȘTEANU G. (VII: 622, 4), MOȚOIU C. (VII: 631, 2, VIII: 499), TĂNĂSESCU I. G. (VIII: 504, 5, 6).

Liceul „Radu Greceanu“, Slatina.

Clasa V-a: DIACONU D. C. (V: 705, 10), GOGIULESCU S. (V: 705, 10, 2).

Liceul „Regele Ferdinand“, Râmnicu-Sărat.

Clasa VIII-a: ROȘIORU T. I. (VIII: 504, 5, 6, 7), TĂNĂSESCU G. (VIII: 504, 5, 6).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa V-a: BIRISTEICĂ P. P. (V: 703, 4, 9, E. G.: 391).

Clasa VI-a: DUMITRESCU GH. (VI: 703, VII: 618).

Clasa VII-a: CARAMALĂU V. E. (VII: 622, 3, 4, 5, 6), ROVENȚA I. C. (VII: 622, 3, 4, 5, 14, 5, 32, VIII: 496, E. G.: 398).

Liceul militar „Mihai Viteazu“, Timișoara.

Clasa IV-a: COCHELA LIVIUS (IV: 607), FLORIN DUMITRESCU (IV: 607).

Clasa V-a: BECICU V. (V: 705), CHIRIAC V. (V: 710), PAVICA A. VICTOR (V: 704, 5, 14), POPESCU MIRCEA (V: 705, 14), SEICEANU C. (V: 711), STAN A. (V: 705, 12), ȘTEFĂNESCU G. (V: 712), STRATI P. I. (V: 712), VALTER C. (V: 712).

Clasa VI-a: BLĂJAN C-TIN (VI: 693), CĂPRIȚĂ G. I. (VI: 698, E. G.: 399), ENĂCHESCU ION (VI: 694), MICUL NICOLAE (VI, 703), MIHALCU ILIE (VI: 495, 693, 702, 704), RIZAN V. C-TIN (VI: 702), TEODORESCU (VI: 693).

Clasa VII-a: CONSTANTIN IUGULESCU (VII: 623), DRAGOMIR MARIAN (VII: 623), FLORIN GH. MATEUCĂ (VII: 623), IANCU HUSSU (VII: 622), OPREA D. GH. (VII: 623), STROE I. PETRESCU (VII: 622, 623).

Clasa VII-a: COMAN LIVIU (VIII: 504, 505), MOGA N. (E. E.: 399), RAFEROIU RADU (VIII: 505).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa VII-a: RĂDOIU D. N. (VII: 618, 22, 3, 5, 32).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa VII-a: VASILESCU N. V. (VII: 622, 3, 5, 7).

EXERCIIII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Mai 1942

Clasa III-a. Exerc. 192. Să se arate că dacă un patrulater are două unghiuri opuse drepte, bisectoarele celorlalte două unghiuri sunt paralele.

G. D. S.

III. 193. Să se arate că în două cercuri de raze diferite, coardele ce corespund la unghiuri la centru egale sunt proporționale cu lungimile cercurilor.

C. I. B.

III. 194. Fie dat un cerc și două puncte M, M', O centrul cercului. Se pot duce din M și M' tangente la cerc, proporționale cu depărtările $MO, M'O$?

C. I. B.

Clasa IV-a. Exerc. 611. Două plane paralele sunt la distanța $h = 12$ cm. Două conuri circulare drepte cu bazele și vârfurile lor în aceste două plane paralele, astfel că vârful unuia este centrul bazei celuilalt și reciproc; razele cercurilor de bază fiind: $r = 3$ cm și $R = 5$ cm.

Suprafețele celor două conuri se taie după un cerc.

Să se afle distanța x a acestui cerc de intersecție la una din baze; apoi să se afle raza y a cercului de intersecție.

O. N. Ț.

IV. 612. O piramidă $SABC$ are fețele SAB, SBC, SCA echivalente. Să se arate că proiecțiile înălțimii $\overline{SH}$ a acestei piramide pe cele trei fețe echivalente sunt respectiv proporționale cu laturile bazei ABC .

Proprietatea este adevărată pentru o piramidă poligonală cu fețele laterale echivalente ?

Știind că măsurile înălțimii și proiecțiilor ei pe fețele echivalente sunt $h, l, l', l'' \dots$ și că perimetrul bazei este $2p$, să se calculeze:

- a) Suprafața laterală și totală a piramidei;
- b) Distanțele piciorului H al înălțimii la laturile bazei;
- c) Distanțele piciorului H la fețele laterale echivalente.

O. N. Ț.

IV. 613. Fie o piramidă triunghiulară $SABC$; G_c, G_a, G_b respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor SAB, SBC, SCA ; M, N, P punctele unde AG_a, BG_b, CG_c înțepă polarul dus prin S paralel cu ABC .

Să se arate că triunghiul MNP este asemenea cu ABC și să se determine raportul de asemănare.

O. N. Ț.

IV. 614. Dintr'o cantitate de făină s'a vândut $\frac{1}{5}$, apoi $\frac{1}{5}$ din rest, din nou $\frac{1}{5}$ din noul rest, operația repetându-se de 5 ori. Au mai rămas la sfârșit 5 kg. Care este cantitatea inițială de făină?

C. I. B.

Clasa V-a. Exerc. 720. Fie MB, MA tangentele duse din M la un cerc O și fie C diametral opus lui A . Să se arate că CB taie pe AM în simetricul lui A față de M .

GH. B.

V. 721. Fie α și β centrele construite în exterior pe laturile AC, BC ale unui triunghi ABC . Să se arate că, dacă A și B sunt fixe, atunci *centrul patrului*, construit pe $\alpha\beta$ spre interiorul triunghiului ABC , este *fix* oricare ar fi poziția punctului C în plan.

GH. B.

V. 722. Fie M, N două puncte și o dreaptă D .

Să se găsească pe dreapta D un punct P astfel ca D să fie bisectoarea unghiului MPN .

N. M.

V. 723. Fie m_1 și m_2 valorile pentru care ecuația

$$(m - a)x^2 - 2bx + (m - c) = 0$$

are o rădăcină dublă.

Să se afle ecuația cu rădăcinile:

$$y_1 = \frac{b}{m_1 - a}, \quad y_2 = \frac{b}{m_2 - a}.$$

N. M.

V. 724. Să se rezolve ecuația

$$\frac{5}{x+6} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-10} + \frac{1}{3x+18}.$$

N. M.

Clasa VI-a. Exerc. 711. Să se demonstreze identitatea:

$$\begin{aligned} & \sin(a+b-c) + \sin(a-b+c) + \sin(-a+b+c) + \\ & + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c) \equiv \\ & \equiv \sqrt{2} \left[\cos(a-b) \sin\left(\frac{\pi}{4} - c\right) + \cos(b-c) \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \right. \\ & \left. + \cos(c-a) \sin\left(\frac{\pi}{4} - b\right) \right]. \end{aligned}$$

GH. D.

VI. 712. În triunghiul ABC mediatoarea laturii BC, bisectoarea unghiului B și mediana vârfului C sunt concurente.

1°. Notând cu C_1 piciorul medianei din C și cu A_1 proiecția vârfului A pe bisectoarea BB', să se demonstreze că dreapta C_1A_1 este paralelă cu BC.

2°. Dându-se laturile a și b , să se formeze ecuația cu ajutorul căreia putem calcula latura c și să se calculeze această latură.

3°. Să se arate, că unghiul B este dat de

$$\cos B = \frac{a}{c} - \frac{1}{2}.$$

G. D. S.

VI. 713. Se dau două conuri circulare drepte cu bazele în două plane paralele, iar vârful unuia în centrul bazei celuilalt și reciproc. Să se arate că suprafețele celor două conuri se taie după un cerc având planul paralel cu planele de bază.

Suprimând din fiecare con partea interioară celuilalt obținem un solid (S). Să se calculeze suprafața laterală a acestui solid știind că: a) unghiul de deschidere α al unuia din conuri este jumătatea unghiului de deschidere a celuilalt con, iar distanța între planele de bază este h .

Aplicație: $h = 1$, $\alpha = 30^\circ$.

O. N. Ț.

VI. 714. Să se găsească valorile lui α mai mici ca 2π , care satisfac ecuația:

$$\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha = 0.$$

O. N. Ț.

VI. 715. Să se rezolve și să se discute rădăcinile ecuației

$$(1 + p^2) \sin^2 x - (1 - p^4) \sin x + (1 - p^2) = 0.$$

O. N. Ț.

VI. 716. Fie un unghi drept xoy și punct fix A pe OX. Prin O ducem o semidreaptă variabilă, care face cu OX un unghi variabil α , iar din A ducem perpendiculara OE pe OM care taie pe OY în P. Paralela dusă prin P la OX taie pe OE în M.

Să se determine α astfel ca $\overline{PM}$ să aibă o lungime dată h .
Discuție.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 634. Fie dreptunghiul ABCD în care $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ ($a > b$). Considerăm punctele M, N deasupra planului ABCD, astfel că triunghiurile MBC și NDA sunt *echilaterale*, iar planul dreptunghiului face același unghi φ cu fiecare din planele MBC, NDA.

Când unghiul φ variază între 0° și 180° și $a = b\sqrt{8}$, se cere să se studieze variația ariei trapezului CMND.

GH. D.

VII. 635. Se dă funcția:

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}.$$

1°. Să se arate că oricare ar fi a și b , curba reprezentativă are o asimptotă fixă și trece printr'un punct fix A .

2°. Să se determine a și b astfel încât curba reprezentativă să aibă asimptota $y = 5$, iar tangenta în A să fie înclinată la 45° pe OX .

3°. Inlocuind pe a și b cu valorile găsite, să se reprezinte grafic funcția.

G. D. S.

VII. 636. Să se studieze variația funcției:

$$y = \cos 2x + a \cos x + b.$$

Să se examineze chestiunea punctelor de inflexie și să se construiască curba reprezentativă a variației funcției în cele trei cazuri: $|a| < 4$; $|a| = 4$; $|a| > 4$.

O. N. Ț.

VII. 637. Să se studieze variația funcției

$$y = \frac{\cos^2 x}{3 - 4 \cos^2 x}$$

și să se construiască curba reprezentativă a acestei variații.

O. N. Ț.

VII. 638. Se dă un triunghi ABC și în interiorul său un punct variabil, M . Cu distanțele punctului M la laturile triunghiului ABC construim un paralelipiped dreptunghiu.

Pentru care poziție a punctului M volumul paralelipipedului construit este *maxim*?

O. N. Ț.

VII. 639. Să se afle aria maximă a unui triunghi isoscel înscris într'un cerc de rază $4a$. Apoi presupunând pe a variabil, să se figureze curba reprezentativă a ariei.

C. I. B.

VII. 640. Să se afle volumul minim al unui con circumscris unei sfere de rază $2a$. Presupunând pe a variabil, să se figureze curba reprezentativă a valori lui.

C. I. B.

Clasa VIII-a. Exerc. 518. Fie ABC triunghiul dreptunghiu în care $A = 90^\circ$. Pe $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$, ca laturi, se construiesc respectiv patratele $AEDC$ și $AGFB$, în exteriorul triunghiului ABC .

Știind că punctele B, C sunt fixe, iar A este variabil, se cere locul punctului de intersecție al dreptelor DE, FG .

Se cere și o soluție prin geometrie pură.

GH. D.

VIII. 519. Fiind date un segment $\overline{OA}$ de mărime și poziție constantă, un punct B fix pe segmentul OA și un cerc variabil (I) tangent în O la OA , se unește punctul C diametral opus în cercul (I) lui O cu punctele A și B . Fie E și F punctele unde CA și CB taie respectiv cercul (I), iar M și N intersecțiile perechilor de drepte (AB, OE) și (AC, OF) . Să se găsească și să se construiască locurile punctelor M și N .

Să se examineze cazul particular când B este mijlocul segmentului OA .

O. N. Ț.

VIII. 520. Fiind date un segment de dreaptă OA , un punct B pe acest segment și un cerc (I) tangent în O la OA , de diametru variabil $\overline{OC}$, să se găsească locul punctului M , intersecția dreptelor (CB, AI) .

Să se găsească asemenea, în cazul când B este mijlocul segmentului OA , locul proiecției P a punctului M pe tangenta AT la cercul (I).

Să se găsească aceste locuri și pe calea geometriei pure.

O. N. Ț.

VIII. 521. Să se determine un con circular drept înscris într-o sferă dată, astfel ca volumul sferei să fie de k ori volumul conului. Discuție.

O. N. Ț.

VIII. 522. Să se taie un con circular dat cu un plan paralel cu baza astfel ca raportul între volumele celor două părți să fie un număr dat k . Discuție.

O. N. Ț.

VIII. 523. Fie $\overline{AA'}$ și $\overline{AA''}$ mediana și bisectoarea triunghiului dat ABC, iar M un punct pe latura BC. Să se determine poziția punctului M pe latura BC astfel că ducând parabola MNP la AB (N pe $\overline{AA'}$ și P pe $\overline{AA''}$) să avem :

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \right)^2.$$

O. N. Ț.

Exerciții Generale. *Exerc. 418.* Există trapeze a căror suprafață este egală cu a unui pătrat?

I. L.

E. G. 419. Suma a două numere este $\mathcal{M}7 + 1$. În ce caz diferența între cubul unuia și pătratul celuilalt este $\mathcal{M}7$?

I. L.

E. G. 420. Suma a două numere prime este $\mathcal{M}5$.

În ce caz suma pătratului unuia și cubului celuilalt este $\mathcal{M}5$?

I. L.

E. G. 421. Un număr este în același timp de formele $\mathcal{M}5 + 2$ și $\mathcal{M}7 + 3$. De ce formă este acest număr față de împărțitorul 5×7 ?

I. L.

E. G. 422. Un număr de trei cifre, cât și suma cifrelor lui sunt $\mathcal{M}31$. Să se arate că în acest caz suma dublului primei cifre și triplului cifrei a doua este $\mathcal{M}31$.

I. L.

E. G. 423. Să se găsească suma numerelor

$$19411942 \text{ și } 19421941$$

prin scădere.

I. L.

E. G. 424. Mai multe persoane iau masa împreună. Dacă fiecare dă câte 100 lei, nu se ajung 200 lei; dacă dă câte 200 lei fiecare, mai rămâne 200 lei.

Cât costă masa luată?

(Soluție aritmetică).

I. L.

E. G. 425. Să se restabilească împărțirea :

$$\begin{array}{r}
 * * * 9 * * * \quad | \quad * 9 * * \\
 * * * * \quad \quad \quad | \quad * 9 * * \\
 \hline
 * * * * * \\
 * * * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

I. L.

E. G. 426. Un număr de trei cifre A este scris după un alt număr B. În ce caz numărul obținut astfel se împarte exact cu diferența primelor două numere ?

I. L.

CONCURSUL DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a apărut în Nr. 1 al Suplimentului)

1. Un observator studiind căderea liberă a unui corp greu, constată că ultimii 300 metri au fost străbătuți în 2 secunde. Să se determine înălțimea de la care corpul a fost lăsat să cadă, timpul în care s'a efectuat această cădere și iuțea cu care corpul lovește solul.

Rezistența aerului se va neglija.

AL. ST.

2. Dintr'un punct de pe pământ, se aruncă un corp A în sus pe verticală cu o viteză inițială v_0 . După ce timp T, trebuie aruncat din același punct un al 2-lea corp B pentru a-l întâlni pe primul la înălțimea $\frac{h}{2}$ (h fiind înălțimea maximă la care se pot urca corpurile). Să se determine vitezele celor 2 corpuri în momentul în care se întâlnesc.

G. T.

3. Dintr'un balcon situat la înălțimea h deasupra străzii, o persoană privește alte 2 persoane A și B care merg pe stradă una în urma celeilalte, pe un drum rectiliniu situat chiar sub balcon și constată că vede mereu distanța între ele AB sub același unghi θ . Persoana A merge cu viteza constantă v .

Să se determine mișcarea (viteză, accelerație) a persoanei B în acest caz.

G. T.

4. O roată dințată are raza $R = 30$ cm și face 50 rotații pe minut. Ea e angrenată cu o altă roată, care trebuie să facă 70 rotații pe minut. Cât va fi raza acestei roți. Cu ce viteză se va ridica o greutate prinsă de un fir învârtit în jurul axului solidar cu această roată, care are o rază $r = 5$ cm. Să se determine cu ce înălțime s'a ridicat greutatea după un timp $t = 2$ secunde.

G. T.

5. Un râu are o lățime de 20 m și viteza apei este de $4^{\text{m/sec.}}$. Pe mijlocul râului vine o barcă cu motor cu viteza de $6^{\text{m/sec.}}$. Un om, de pe mal, care are o viteză maximă de înot în apă liniștită de $2,5^{\text{m/sec.}}$, se lansează în apă perpendicular pe mal. La ce distanță trebuie să fie atunci barca de punctul din care pornește omul, pentru ca omul s'o întâlnească exact în momentul în care ajunge și el în mijlocul râului.

G. T.

6. Un avion este lovit de un proiectil în momentul când se află în sbor rectiliniu cu viteza $v_0 = 500^{\text{km/oră}}$ la înălțimea constantă $h = 7000$ m deasupra solului. Pilotul își continuă mai departe sborul dar constată că viteza avionului scade proporțional cu timpul și ajunge după $t = 55$ secunde la $v_1 = 240^{\text{km/oră}}$. După timpul $t_1 = 70$ secunde dela accident, pilotul pierde controlul avionului care se prăbușește.

Să se determine: 1) spațiul parcurs de avion din momentul accidentului și până la prăbușire; 2) viteza avionului în momentul prăbușirii.

Să se studieze căderea avionului. Rezistența aerului se va neglija.

AL. ST.

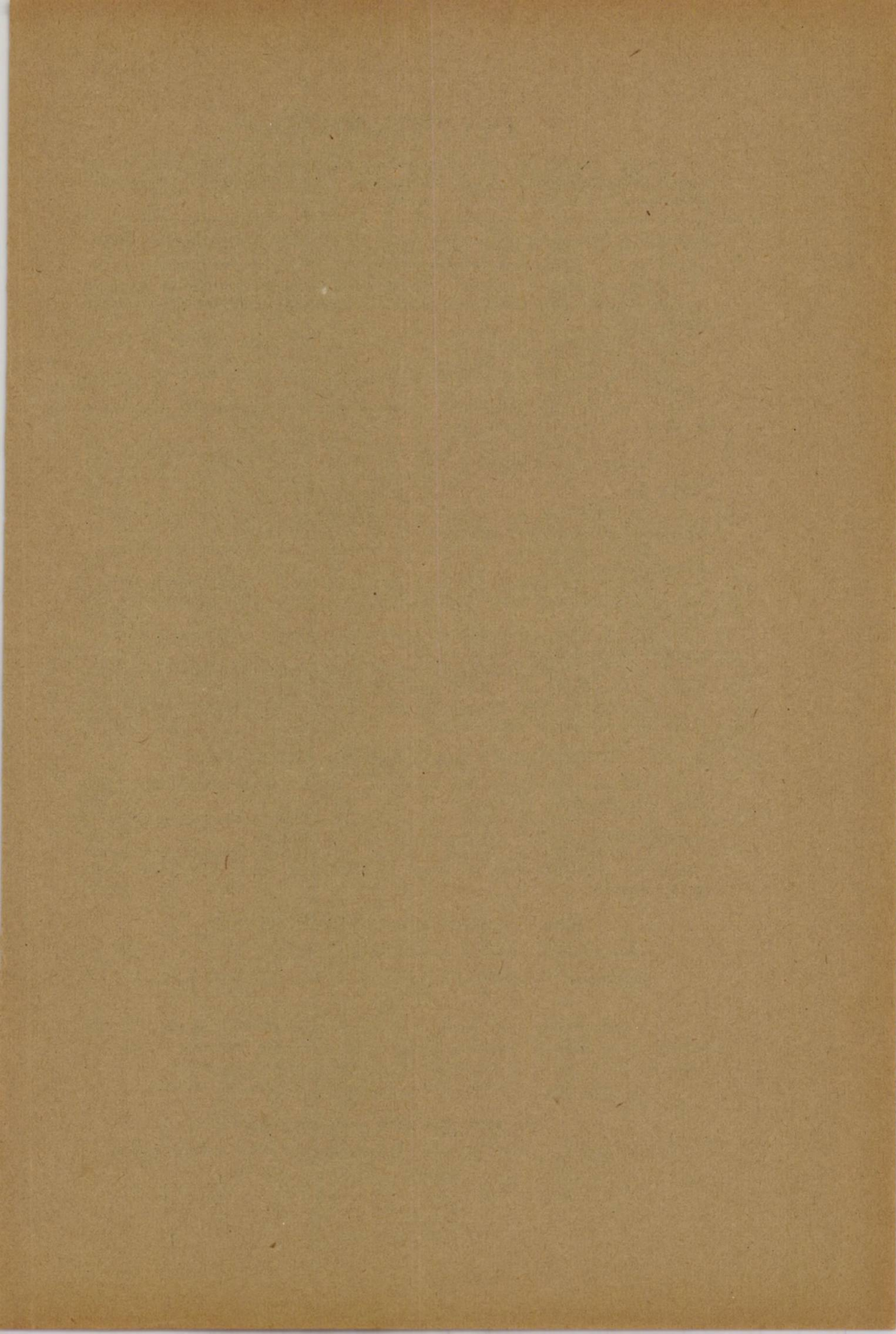
7. Presupunând că luna în mișcarea sa în jurul pământului descrie un cerc de raza $R = 384.000$ km în 27,321 zile, să se calculeze viteza și accelerația sa.

Având în vedere că accelerația obținută este datorită forței de atracție a pământului și cunoscând masa $M = 6 \times 10^{27}$ grame-masă a pământului și masa $m = 7,4 \times 10^{25}$ grame-masă a lunii să se determine coeficientul k din formula de atracție a lui NEWTON:

$$F = k \frac{mM}{R^2}$$

și să se calculeze forța cu care pământul atrage luna.

AL. ST.



INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății „Gazeta Matematică”.

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. N. Abramescu, Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a	Lei 120
IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și G. Țițeica, Vocabular Matematic	Lei 20
X. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
XI. <i>Gazeta Matematică</i> 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.)	
XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu	Lei 95
XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională	Lei 190
XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu	Lei 125
XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită	Lei 120
XVI. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de N. G. Botea	Lei 140
XVII. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită	Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. <i>Elementele lui Euclid</i> . (Cărțile I—VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian	Lei 160
II. <i>Elementele lui Euclid</i> . (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian	Lei 250
III. <i>Elementele lui Euclid</i> . (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPsicLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian	Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA”

I. Ion Ionescu, <i>Maxime și minime geometrice</i>	Lei 135
Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere)	Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septemvrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa *Gazeta Matematică*. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).

GAZETA MATEMATICA

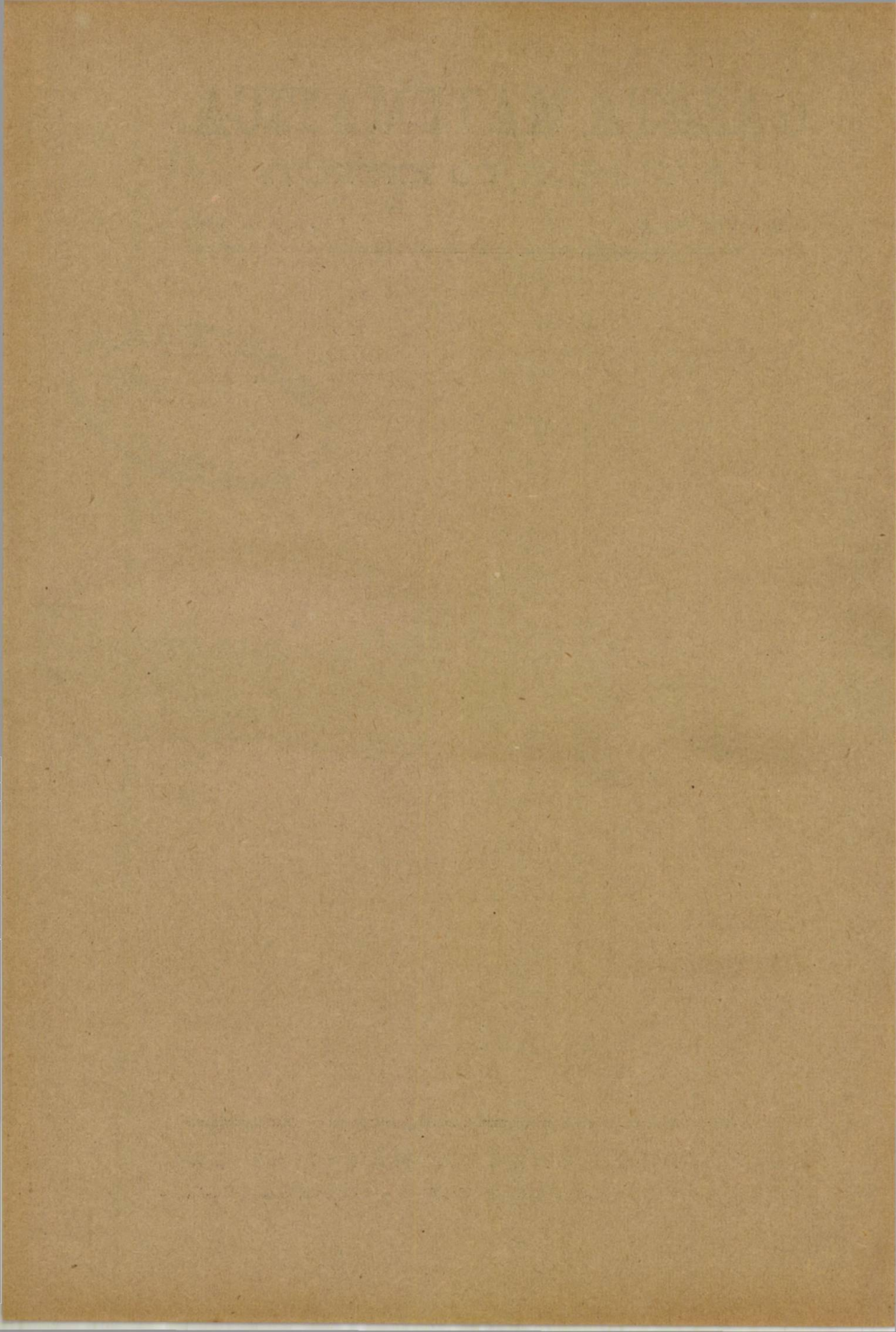
SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 6

1 MARTIE 1942



SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803



GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 6

1 MARTIE 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

După cum s'a anunțat în numărul 2, din Octomvrie 1941, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ține un concurs de matematici între elevii liceelor din țară și studenții anului I al Politehnicei din București.

Au fost admiși următorii candidați pentru concurs:

Clasa IV-a: Bârzescu Mircea, Ciumașu Viorel, Nache D. Dumitru.

Clasa V-a: Columbeanu D. Petre, Ghiță M. Vasile, Ieșan St. Alexandru, Mihăilescu I. Ștefan, Munteanu P. Vlad, Pavica A. Victor, Pitiș L. Nicolae, Roșu T. Nicolae, Șerbănescu I. Victor.

Clasa VI-a: Andreescu Mihai, Andrei G. Aurel, Balea I. Ioan, Căpriță G. Ioan, Dumitrescu F. Dan, Fânaru N. Dumitru, Gâță G. Gheorghe, Ionescu Marieta, Mihalcu I. Ilie, Staicu I. Constantin, Turculeț D. Tiberiu, Vasiliu G. Dumitru.

Clasa VII-a: Aron I. Gheorghe, Căruntu D. Florin, Constantinescu I. Emil, Dobrescu V. Eugen, Oprea D. Gheorghe, Popa T. Teodor, Popescu G. Marin, Puchiu T. Gheorghiu, Stoianovici I. Șerban.

Clasa VIII-a: Aldea Virgil, Arendt R. Emil, Bogdan Gr. Gheorghe, Diaconescu V. Constantin, Drăghicescu P. Paul, Floreșteanu Alexandru, Mănescu G. Ioan, Miroslav Tudorel, Musceleanu S. Doru, Musceleanu S. Viniciu Ștefan Ion, Popa N. Aurel.

Anul I al Politehnicei București: Cruceru Gh. Constantin, Mărgărit I. Nicolae, Sbârnea D. Gheorghe.

Adică 3 candidați pentru clasa IV-a, 9 pentru clasa V-a, 12 pentru clasa VI-a, 9 pentru clasa VII-a, 11 pentru clasa VIII-a și 3 pentru anul I al Politehnicei București.

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris. Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă va avea loc Joi 9 Aprilie 1942, dela ora 8³⁰ până la 11³⁰; iar a doua lucrare scrisă în aceeași zi, dela ora 15 până la ora 18 la Politehnică, Calea Griviței 132, București.

Oralul va începe Vineri 10 Aprilie, ora 8³⁰, tot în localul Politehnicei. Candidaților elevi de liceu înscriși la concurs, care nu dispun de mijloace materiale pentru venirea și întreținerea lor în București (după cum au arătat în cererilor lor), li se vor trimete în vacanța de Paști sumele necesare transportului la București în tot timpul concursului.

Eventualele modificări vor fi la timp comunicate.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

EXERCIȚII REZOLVATE

Exerciții Generale. *E. G. 352. Se cere să se găsească numărul total de soluții distincte pentru cazul II al exercițiului E. G. 303 a cărui soluție s'a dat la pagina 105, Vol. VII al Supl. cu Ex.*

GH. B.

Prin exercițiul E. G. 303 se cereau numerele $abbc$, $deef$ așa că
 $abbc + deef = 10000$.

Cazul II corespundea condițiilor

$$c + f = 10, \quad b + e = 9, \quad a + d = 9.$$

Aceste condiții dau pentru grupele de cifre a, d ; b, e ; c, f ; valorile cuprinse în tablourile:

I.	a	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
II.	b	9	8	7	6	5	4	3	2	1	9
	c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
III.	c	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
	f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Cifrele a, b, c, d, e, f fiind diferite între ele se elimină grupa (5,5) din tabloul III. Din examinarea acestor tablouri se vede că la o grupă (a, d) din tabloul I corespund 7 grupe în tabloul II care are cifrele diferite de ale grupei considerate din tabloul I.

Pentru a forma toate soluțiile distincte luăm pe rând câte o grupă (a, d) din tabloul I și o asociem pe rând cu toate grupele (b, e) din tabloul II, care au cifrele diferite de a și b . Apoi asociem ansamblul acestor grupe, în aceleași condițiuni cu grupele tabloului III. Se observă că pentru căutarea numărului total de soluțiuni este suficient a lua numai jumătate din grupele tablourilor I și II, cealaltă jumătate conținând aceleași cifre însă în sens invers.

Formăm în cele ce urmează $\frac{1}{2}$ din numărul soluțiilor corespunzătoare primelor 5 grupuri (a, d):

ad	bc	cf	ad	be	cf
90	81	73, 64, 46, 37	81	90	73, 64, 46, 37
	72	64, 46		72	64, 46
	63	82, 28		63	Nimic
	45	82, 73, 37, 28		54	73, 37
72	90	64, 46	63	90	82, 28
	81	64, 46		81	Nimic
	63	91, 19		72	91, 19
	54	91, 19		54	91, 82, 28, 19
54	90	82, 73, 37, 28	Acest tablou conține 96 soluțiuni.		
	81	73, 37			
	72	91, 19			
	63	91, 82, 28, 19			

Deci numărul total de soluțiuni este $2 \times 96 = 192$.

E. G. 353. Dacă a, b, c, d, e, f, g sunt cifre diferite între ele și diferite de 1 și 6, atunci produsul lui 6 cu numărul de 8 cifre 1abcdefg nu poate fi un număr de 10 cifre diferite între ele.

GH. B.

Avem $P = 6 \times 1abcdefg$. Fie $6 \times a = 10\alpha + \beta$.

Urmează că cifrele dela stânga lui P sunt date de numărul $6 \times 1 + \alpha$ care nu poate fi decât cel mult 11 când $\alpha = 5$, ceea ce are loc pentru $a = 9$. Deci P are cel mult 9 cifre.

Până la 1 Februarie 1942 s'au primit soluții la problemele propuse în numerele 2, 3, 4 dela *):

Liceul de fete „Carmen-Sylva“, București.

Clasa VI-a: DAMIAN LUCIA (E. G. : 409, 11, 3, 6, 8, 20), IONESCU MARIETA (V : 702, 4, 10, 1, VII : 622, 3, E. G. : 392, 409, 11, 4, 5, 6), STOICESCU V. (E. G. : 409, 13, 4, 8, 20, 3).

Clasa VII-a: DAMIAN CORNELIA (E. G. : 409, 10, 1, 6), SPĂTARU ELENA (VII : 630, E. G. : 404, 16), VARVERI GABRIELA (E. G. : 401, 6, 7).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu“, București.

Clasa VIII-a: STOIA I. S. (VIII : 512*, E. G. : 406, 7, 9).

Institutul Ortodox Internat, București.

Clasa V-a: MATEESCU P. MIHAELA (V : 720*, 3, E. G. : 404, 6, 7, 9, 10, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 20, 3).

Liceul teoretic de fete, Brăila.

Clasa VIII-a: COLGIU SILVIA (E. G. : 410*, 5).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa VII-a: LUNGU C. MARIA (VII : 620, 2, 4).

Clasa VIII-a: PUȚUREANU C. ELENA (VIII : 511*, 2*, 3, 6).

Gimnaziul „Iulia Hasdeu“, Hotin.

Clasa IV-a: ALEXEEV V. ELEONORA (IV : 606, 6, 10, 1), DUBCEAC P. LUDMILA (IV : 606, 7, 10, 1), GARIUC A. VERA (IV : 607, 8, 10, 1), MANCIU P. TAMARA (IV : 606, 7, 10, 1), VOLOȘETȚCHI VERA (IV : 606, 7, 10, 1), VERJAC SERAFIMA (IV : 607, 10, 1), ZABOLOTNEI A. NADEJDA (IV : 606, 7, 10, 1).

Liceul de fete „Carmen Sylva“, Timișoara.

Clasa VII-a: CÂNDEA M. (VII : 640).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VI-a: TIMOTIN A. A. (VI : 699, 700, E. G. : 402, 4, 6, 7, 16, 9, 23, 5).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa VI-a: BÂLCU ST. N. (VI : 703), HARBUNIEV P. V. (E. G. : 394, 7), MIHALACHE M. N. (E. G. : 409), MIȘICU V. M. (VI : 708, 11, E. G. : 402), SORESCU P. S. (VII : 628*, 9, 30).

Clasa VIII-a: IONESCU G. (E. G. : 392, 5, 406, 7, 9, 10, 1, 5), NADOLU G. (E. G. : 392, 3, 404, 6, 9, 13).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa IV-a : ARDARE N. N. (E. G. : 409, 10, 1, 6, 8, 23), TIMIȘ A. D. (IV : 615*, E. G. : 406, 7, 20, 3).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa VII-a : CONSTANTINESCU E. (VII : 520, 3, VIII, 605, E. G. : 392, 3, 5, 6, 400, 1, 2, 4, 5, 6*, 7), CONSTANTINESCU M. (VII : 622, 3, 5, E. G. : 401, 2, 4, 7, 8), NICULESCU P. (VII : 623, 5, E. G. : 394, 411), PASCU C. (VII : 622, 5, E. G. : 394, 401, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 3, 6), ROVENȚA G. I. (E. G. : 392, 3, 4, 5, 7, 404, 6, 7, 8, 9, 11, 3, 6).

Clasa VIII-a : IOSIPESCU C. I. P. (E. G. : 392, 3, 5, 7, 401, 4, 6, 7, 8).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI G. D. (III : 186, 90, 1, 2, V : 712, 2, 3, 7, VI : 704, E. G. : 392, 3, 5, 401, 4, 13, 4, 6, 8, 9).

Clasa VII-a : TĂNĂȘESCU G. V. (VII : 629, 32, 4, 40, E. G. : 407, 10, 1, 6, 8, 20, 3).

Clasa VIII-a : CORBARU A. D. (VIII : 519, 20, E. G. : 407), LAPTEV G. (VIII : 518*, 20, 4, 5, E. G. : 409, 10, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 21, 3), LUPU N. A. (E. G. : 395, 409, 10, 1, 3, 4, 5, 6), SENI C. (E. G. : 392, 3, 402, 3, 4, 5, 6, 10, 2, 3, 4, 5, 7).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa V-a : RĂDOIU M. M. (V : 720*).

Clasa VIII-a : NICOLESCU G. A. (VIII : 504, 5, 16, 24, 5).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VII-a : ARON I. G. (VII : 622, 3, 4, 5).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a : BOCIORT F. I. (V : 710, 2, VI : 703).

Liceul „Regele Ferdinand I“, Bacău.

Clasa VII-a : IOSIPESCU E. P. (VII : 629, 30, 2).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa V-a : MANOLIU A. G. (V : 710, 20*).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa VIII-a : ALEXANDRU ȘTEFAN N. (VIII : 625).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă“, Brașov.

Clasa VII-a : GEORGESCU M. (VII : 627, 9, 30, 2, 9).

Liceul „B. P. Hasdeu“, Buzău.

Clasa VI-a : PETCULESCU D. M. (VI : 710).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa VI-a : NIȚU I. G. (E. G. : 406, 7, 9, 10, 3, 8, 20, 3).

Clasa VIII-a : BĂNICĂ I. G. (VIII : 525).

Liceul „Știrbey Vodă“, Călărași-Ialomița.

Clasa V-a : NICULESCU T. V. (V : 720*).

Clasa VIII-a : NANU D. V. (VIII : 513, 6, 20, 5).

Liceul „Aron Pumnul“, Cernăuți.

Clasa VII-a : BORDIAN V. N. (VII : 629, 30).

Clasa VIII-a : DIACON A. (VIII : 502, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 3, 4, 6),
SĂHLEANU V. (VIII : 502, 6, 16).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Cernăuți.

Clasa IV-a : ASTALOS TRAIAN (IV : 610, 1), CÂRSTEA PETRE (IV : 610, 1),
CAULEA D-TRU (IV : 610, 1), CONSTANTINESCU E. (IV : 610, 1), CHEȘCĂ ION (IV :
610), CUCU M. (IV : 610), DOBRIU M. (IV : 610), FEDARIAC M. (IV : 611), GRI-
GORESCU I. (IV : 610), IONESCU M. (IV : 610), IASOREANU A. (IV : 610, 1),
JEMNA I. (IV : 610), LOZINCA M. (IV : 610, 1), MOCANU M. (IV : 610), MITĂ M.
(IV : 610, 1), MIHĂLCEANU ȘT. (IV : 610, 1), MARINESCU S. (IV : 610, 1), NICO-
LESCU C. (IV : 610, 1), PETRE AUREL (IV : 611), POPOVICI L. (IV : 610, 1),
RĂDULESCU V. (IV : 610, 1), RĂDĂCINEANU O. (IV : 610), RODEANU M. (IV : 610),
SILIȘTEANU D. (IV : 608, 10), STURZA D. (IV : 610, 1), TELNICEANU S. (IV :
610), TEODORESCU S. (IV : 610, 1), TUȚUIANU ST. (IV : 610, 1), URECHE I. (IV :
610, 1).

Clasa VI-a : CIMBRU V. M. (VI : 711, 2, E. G. : 401, 4, 8, 9, 16), DUMI-
TRESCU G. (VI : 711, 2), DUMITRESCU V. I. (VI : 703, 4, 11, 2, 5, 6), NICOLAESCU
I. (IV : 712), RAUGA C. (IV : 711), SOARE M. M. (IV : 711, 2), STAICU C. (E. G. :
392, 3, 401, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 5, 6, 8, 25), TĂNASE I. G. (VI : 711), ȚĂRANU
S. (VI : 711), TEODORESCU A. (VI : 711).

Clasa VIII-a : NICOLAE A. (VIII : 497, 8), BĂRBUȚ T. (VIII : 516, 23,
E. G. : 395, 7), DIACONESCU V. C. (E. G. : 395, 404, 9, 10, 5, 6), GEORGESCU N.
(VIII : 519, 20), IRIMESCU P. (VIII : 505), IVAN H. (VIII : 505, 19, 20), JIPA N.
(VIII : 505), MIREA G. (VIII : 497, 8), POPESCU G. (VIII : 505, 19), POPESCU S.
(VIII : 520), TOPÂRCEANU I. (VIII : 509, 5, 6, 19), VATAN G. (VIII : 519), VLĂ-
DESCU G. (VIII : 504, 19, 23), ZAVAȚI C. (VIII : 504, 19, 20, 3).

Colegiul Național „Carol I“, Craiova.

Clasa VII-a : IONESCU F. P. (VII : 629, 30, 2, 3).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a : BURGĂ A. A. (IV : 610, 1, E. G. : 401), CONSTANTIN PETRE
(IV : 610, 1, E. G. : 420), NIȚĂ NICOLAE (IV : 610, 1, E. G. : 420, 3).

Clasa VII-a : ANTONIU I. I. (VII: 634, 7, 9, E. G.: 418, 25), ARDELEANU I. (VII: 639, E. G.: 418), BĂDESCU FL. (VII: 634, 9, E. G.: 418, 20), BIȚĂ A. (VII: 634, 7), BOTEZATU TR. (VII: 634, 9, E. G.: 418), BRATU I. (VII: 639, E. G.: 418), CIOARĂ C. GH. (VII: 634, 9, E. G.: 418), CONSTANTINESCU C. (VII: 634, 9, E. G.: 418, 20), CODRES INOCENȚIU (E. G.: 418), DOGARU D. (VII: 639), DINCULEANĂ N. (VII: 639, E. G.: 418, 20), DOGARU D. M. (E. G.: 392, 418), DUDUȚĂ TRAIAN (E. G.: 418, 20), DUȚĂ T. (VII: 639), FLORESCU I. C. (VII: 634, 9, VIII: 496, E. G.: 418), GHINEA M. (VII: 634, 9), E. G.: 418), HURUZEANU M. (VII: 634, 9), IONAȘCU FL. (VII: 634, E. G.: 418), IONOCENȚIU C. (VII: 634, 9), ISMANĂ M. (VII: 639, E. G.: 418), JANGVEIN GH. (E. G.: 418), MARINCU ILIE (VII: 639, E. G.: 418, 20), MARINESCU M. POSOI (VII: 634, 9, E. G.: 418), NICULESCU M. (E. G.: 418, 20), PĂSĂRICĂ V. (VII: 634, 9, E. G.: 418), POLIZU ALEX. (VII: 639, E. G.: 418, 20), POPESCU I. I. (VII: 639, E. G.: 418, 20), POPESCU M. (VII: 639), PROCOPIE N. V. (VII: 639), PROCOPIU C. N. (E. G.: 418, 20), RĂDULESCU GH. (VII: 634, 9, E. G.: 420), RĂDULESCU I. (VII: 639, E. G. 418) RUJAN (VII: 639), STREINU M. (VII: 639, E. G.: 418, 20), TOMESCU AL. (VII: 639, E. G.: 425), VILAICA I. GH. (VII: 639, E. G.: 418, 20).

Clasa VIII-a : ANTONESCU I. (E. G.: 405, 20), CERCEL CORNELIU (E. G.: 415, 20), CONSTANTINESCU I. (E. G.: 415, 20), DIACONU A. (E. G.: 409, 20), DUNĂREANU I. O. (E. G.: 405, 15), ILIESCU TR. (VIII: 516, E. O.: 405, 15, 20), IONESCU BARBU (E. G.: 415, 20) JIANU N. (E. G.: 415, 20), MANEA GH. I. (E. G.: 415, 20), MATEESCU A. (VIII: 520, 3, E. G.: 393, 401, 2, 9, 10, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 20, 1, 3, 5, 6), MIHAI N. (VIII: 516, E. G.: 415), MOVANU P. (VIII: 513, 6, 20, E. G.: 409, 10, 1, 3, 5, 6, 8, 20, 1, 3, 5, 6), MUȘCELEANU I. (E. G.: 397, 403, 6, 8), PAȘOI N. D. (VIII: 516, E. G.: 414, 5, 6, 20), PLEȘEA I. EM. (E. G.: 405, 20), POPA P. E. (VIII: 516, E. G. 405), POPESCU GH. GH. (VIII: 516, E. G.: 405, 15), POPESCU V. (E. G.: 405, 20), RADU C. I. (E. G.: 405, 15, 20), ȘERBAN P. (VIII: 516, E. G.: 405, 15, 20), VÂLCEANU R. (E. G.: 405, 15, 20), ZAHARIA S. (VIII: 507, 16, E. G.: 392, 3, 401, 4, 9, 10, 1, 3, 5, 6, 20).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I“, Craiova.

Clasa I-a : SOARE S. (IV: 603, 10, 1).

Clasa IV-a : BERCESCU A. R. (IV: 607), BUȘILĂ V. (IV: 603), CIOBOTĂ C. (IV: 603), CROITORU V. (IV: 603, 7, 10, 1), GOGA P. (IV: 603, 10, 1), GROSU M. (IV: 603), IONESCU O. (IV: 603), MILOȘ V. (IV: 610, 1), MOCANU P. (IV: 603), NEGOLI V. (IV: 603, 10, 1), NICULESCU D. (IV: 610), NICULESCU V. (IV: 603), NEGULESCU G. (IV: 603), PETRE SILVICA (IV: 603), PARASCHIV P. (IV: 607), POPESCU N. (IV: 603, 7), POPESCU IONIȚĂ (IV: 603, 7), POPOVICI H. (IV: 611), RĂILEANU R. (IV: 603), STANCIU A. (IV: 603).

Clasa VI-a : GUDUMAC S. V. (VI: 711).

Clasa VII-a : FLOREA VIRGIL (VII: 627, 32, E. G.: 409).

Clasa VIII-a : GHEORGHE FILIP (VIII: 513, 6, E. G.: 409, 10).

Liceul „Negru Vodă“, Făgăraș.

Clasa VII-a : CRIȘAN O. (VII: 630).

Liceul „Ion Maiorescu“, Giurgiu.

Clasa VII-a : PALADA T. G. (VII : 622, 9).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a : BÂRSĂNESCU M. V. (E. G. : 409), IACOBET N. (E. G. : 392, 401, 16), PARASCHIVESCU M. (E. G. : 401, 14).

Clasa IV-a : BÂRZESCU M. (E. G. 404, 9, 11, 6), BENESCU I. N. (E. G. : 401, 11, 4), RADU M. C. (E. G. : 404, 9, 11, 6).

Clasa V-a : BĂDÂRCĂ I. (V : 718), MIHAIL T. E. (E. G. : 421, 3), ROȘU N. (V : 718, E. G. : 410), SBURLAN N. (V : 718, E. G. 410, 21, 3), VASILESCU I. I. (V : 718, E. G. : 420), VINTILĂ C. (E. G. : 421, 3).

Clasa VI-a : ANDARACHI I. (E. G. : 415, 6), ANDREESCU M. (VI : 710, E. G. : 407, 15, 6), ARDELEANU GH. (VI : 703, E. G. : 418, 20, 3), ANDREI A. (VI : 703, 4, 10, E. G. : 407, 15, 6), BOSINCEANU C. C. (VI : 703, 10, E. G. : 407, 15, 6), COROIU D. (E. G. : 415, 6), IONESCU M. (VI : 703, 10), PETICARU I. M. (VI : 703, 4, 10), TURCULEȚ T. (VI : 710, E. G. : 406, 7, 15), VASILIU G. D. (VI : 698, 710, E. G. : 406, 7, 9, 15), VĂIDEANU GH. (VI : 710, E. G. : 407, 15, 6, 20).

Clasa VII-a : CĂRUNTU D. F. (VII : 624, 7, VIII : 497), CONSTANTINESCU M. (VII : 627), IFTODE C. (VII : 627), MATEESCU M. G. (VII : 627), MILEA C. V. (VII : 624), PUCHIU T. G. (VII : 624, VIII : 497).

Clasa VIII-a : DRĂGHICESCU P. P. (E. G. : 409, 10, 5, 6), POPA N. A. (VIII : 504, 5, E. G. : 401, 2).

Liceul „Național“, Iași.

Clasa VII-a : DIMITRIU TIPAN (VII : 628*, 9, 30, 2, 4, 7, 9, 40).

Liceul Internat, Iași.

Clasa VII-a : EFTIMIE G. A. (VII : 630), LEON G. C. (VII : 627, 30), SPIRIDONEANU N. M. (VII : 660, 4, 5, 7, 9*, 32, 7, 40, VIII : 513, 4).

Clasa VIII-a : MANOLACHE C. M. (VIII : 520), MIRCEA C. M. (VIII : 497, 8, 523).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a : CUBAT N. A. (VII : 629, 39, 40), DONȚU G. G. (VII : 629, 33, 9, 40).

Liceul C. Brediceanu, Lugoj.

Clasa VI-a : BUȘNEAG A. D. (VI : 707, 11).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploiești.

Clasa VII-a : MOȚOIU S. C. (VII : 629).

Colegiul Național Militar, Predeal.

Clasa III-a : DOBRICĂ S. (III : 188).

Clasa IV-a : BADRUȘ I. GH. (E. G. : 419), GHEORGHIU M. (VII : 628*), HIRIPEANU TR. (E. G. : 419), RADU T. MIHAI (V : 723, E. G. : 420, 3), STOIANOVICI I. S. (VII : 628, 9, 30), VOLANSCHI DAN (E. G. : 419, 20, 3), VULCAN V. (V : 720, E. G. : 419).

Clasa V-a: COLUMBEANU P. (VI: 703), GHEORGHIOU O. (V: 714), GHEORGHIOU C. (V: 712), GHÎȚĂ M. V. (VI: 703, E. G.: 401, 7), POJOGEANU M. (V: 714), PITIȘ N. (VI: 699).

Clasa VI-a: BERBERIANU A. (VI: 703), 5, 11, VIII: 513), BUZESCU M. (E. G.: 418, 20, 3, 5), CORTUȘAN J. (VI: 706, 11), ILIESCU C. C. (VI: 711, E. G.: 404, 7, 18, 9*, 23), PAROTA P. (VI: 705, 11), POMPILIU P. (VI: 703), PURICA I. (VI: 705, 11, VIII: 524, 5), ROȘU M. (VI: 705, 11), TURTOESCU L. (VI: 711).

Clasa VII-a: COLUMBEANU S. (VIII: 624), GHEORGHIOU M. (VII: 632, 9, E. G.: 407, 9, 15), NICULESCU C. (VII: 625), PURICA I. (VII: 627), STOIANOVICI ȘERBAN (VII: 627, 32, E. G.: 392, 3, 5, 401, 4, 6*, 7, 9, 10*, 1, 2, 3*, 4*, 5, 6*, 8, 20*, 3, 5, 6).

Clasa VIII-a: ALDEA V. (E. G.: 404), FLOREȘTEANU D. A. (E. G.: 404*, 18, 9, 20, 3, 5, 6), LUNGU I. M. (E. G.: 401, 4).

Liceul „Al. Lahovary“, Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VIII-a: BORESCU D. (E. G.: 407, 9, 10, 6).

Liceul „Roman Vodă“, Roman

Clasa VIII-a: ADONUȚ I. (E. G.: 395, 7, 404, 7, 15, 6).

Liceul „Radu Greceanu“, Slatina.

Clasa VIII-a: ZEVELEANU C. (VIII: 512, 20, 6, 9).

Liceul „Enăchiță Văcărescu“, Târgoviște.

Clasa VII-a: ALBOTEANU B. V. (VII: 629, 30), SĂFTOIU I. E. (VII: 627, 8, 9, 30, 5, 8, 9).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa VI-a: GIȚĂ G. G. (VI: 710, E. G.: 414).

Clasa VII-a: GIURGIULAN I. (VII: 622, 3, 4, 9, E. G.: 416).

Clasa VIII-a: DĂNĂU C. (VIII: 508, 19, 20, E. G.: 401, 6, 9, 13, 6), GELEPU V. (VIII: 519, 20), POENARU V. (E. G.: 409).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa VII-a: GIONEA A. C. (VII: 620, 9*).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa VII-a: VASILESCU N. V. (VII: 629).

Liceul „M. Kogălniceanu“ Vaslui.

Clasa VII-a: STAMATI I. M. (VII: 629).

Liceul Militar, Timișoara.

Clasa IV-a: COCHELA I. SILVIU (E. G.: 416), POPESCU I. (E. G. 408).

Clasa VI-a: CĂPRIȚĂ GH. I. (E. G.: 401, 7, 16), MIHALCU I. (E. G.: 392, 407), TEODORESCU C. (E. G.: 401).

Clasa VII-a: DRAGOMIR A. M. (E. G.: 401), MOGA L. N. (E. G.: 401), OPREA GH. (E. G.: 406, 7), PETRESCU I. S. (E. G.: 401).

Din cauza greutăților de expediție, unele din soluțiile bune ale corespondenților noștri nu au fost trecute în acest tablou. Vor apare în Nr. viitor.

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1942

Clasa III-a. Exerc. 198. Se dă un trapez dreptunghiu ABCD, având $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AB} = h$ și un punct M pe baza BC astfel ca $\overline{BM} = m$.

$$a = 106 \text{ mm}; \quad b = 156 \text{ mm}; \quad h = 120 \text{ mm}; \quad m = 160 \text{ mm}.$$

Prin N, intersecția dreptelor AM, CD, ducem paralela NP la baza AD. Să se calculeze lungimile paralelei NP și ale segmentelor ND, NC.

O. N. Ț.

III. 199. Punctele A, B, C, D, E, F împart cercul dat (O) în șase părți egale; tangentele LG, GH, HI, IJ, JK, KL în A, B, C, D, E, F la cercul (O) formează exagonul regulat GHIJKL. Să însemnăm cu M, S, N, Q, P, R intersecțiile perechilor de drepte: (KG, AD); (KG, CF); (KI, AD); (KI, BE); (HL, BE); (HJ, CF).

Să se arate că MPRNQS este un exagon regulat și să se calculeze aria lui, raza cercului (O) fiind $R = 11 \text{ cm}$.

O. N. Ț.

III. 200. Fie cercul (O) dat și punctele A, B, C, D, E, F care îl împart în șase părți egale. Construind triunghiurile ACE și BDF obținem punctele: M(AC, BF); N(AC, BD); P(BD, CE); Q(CE, DF); R(DF, EA); S(EA, FB).

Să se arate: 1°. Că triunghiurile ACE și BDF au laturile paralele două câte două;

2°. Că exagonul MNPQRS este un exagon regulat;

3°. Fără a calcula latura exagonului MNPQRS, că aria lui este egală cu o treime din aria exagonului regulat ABCDEF (prin echivalențe de figuri).

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 620. Fie ABCD un tetraedru regulat; M, N, P, R, S, T mijloacele muchiilor AB, AC, AD, BC, CD, DB; a, b, c, d centrele de greutate (punctele de întâlnire ale medianelor în fețele BCD, CDA, DAB, BAC).

Să se arate că a, b, c, d sunt vârfurile unui tetraedru regulat.

O. N. Ț.

IV. 621. Se dă o sferă (O) de rază R și se înscrie tetraedrul regulat ABCD în ea.

Să se calculeze *suprafața* și *volumul* tetraedrului ABCD.

O. N. Ț.

IV. 622. Știind că muchia unui tetraedru regulat are lungimea a , să se calculeze *suprafața* și *volumul* sferei înscrise în acest tetraedru.

O. N. Ț.

IV. 623. Să se rezolve sistemul :

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = \frac{6}{5} \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{5}.$$

C. I. B.

Clasa V-a. Exerc. 730. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{4}{6} ; \quad \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{2} ; \quad \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6}.$$

C. I. B.

V. 731. Să se rezolve ecuația :

$$b(1+m^2)x^2 + (2abm - 2b^2 - a^2m^2 - b^2m^2)x + a^2bm^2 + b^3 - 2ab^2m = 0$$

și să i se pună rădăcinile sub o formă cât mai simplă.

GH. B.

V. 732. Să se determine m , astfel ca ecuația

$$(2m+1)x^2 + (3m-1)x + 40 = 0$$

să aibă o rădăcină $x_1 = 2$. Să se afle a doua rădăcină.

N. M.

V. 733. Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$(\lambda+1)x^2 + (\lambda^2 + \lambda + 1)x + \lambda(\lambda+1) = 0,$$

unde λ este un parametru variabil.

G. D. S.

V. 734. În patrulaterul inscriptibil ABCD, avem $\overline{DA} = \overline{DC}$. Să se arate că intersecția O a diagonalelor se găsește pe cercul ce trece prin B și este tangent în C la DC.

N. M.

Clasa VI-a. Exerc. 722. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{6} + x + y\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{6} - x + y\right) \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x - y\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - x + 2y\right) &= 0.\end{aligned}$$

C. I. B.

VI. 723. Să se pună sub formă de produse, sumele:

$$E_1 \equiv \cos(a - b) \cos(a - c) - \cos b \cos c$$

$$E_2 \equiv \sin(a - b) \sin(a - c) - \sin b \sin c$$

$$E_3 \equiv \cos(a - b) \cos(a - c) - \sin b \sin c$$

$$E_4 \equiv \sin(a - b) \sin(a - c) - \cos b \cos c.$$

Caz particular: $a + b + c = \pi$.

G. D. S.

VI. 724. Să se demonstreze că expresia

$$E \equiv \left(\frac{a}{2} - c \cos B\right) \left(\frac{a}{2} - c \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}\right)$$

poate să fie pusă sub forma:

$$E \equiv \frac{a^2}{4} - bc \sin^2 \frac{A}{2}.$$

G. D. S.

VI. 725. Fie I centrul cercului înscris unui triunghi ABC și A' mijlocul laturii BC. Să se arate, că

$$\overline{IA'} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4rr_a + 4r^2},$$

a, r, r_a fiind măsurile laturii BC, razei cercului înscris și razei cercului exînscriș corespunzător laturii BC.

G. D. S.

VI. 726. Se dă un cerc (O) de rază r , un diametru al său AB, I mijlocul razei OA, un punct M pe cercul O astfel ca măs. $\widehat{MOB} = 30^\circ$ și coarda $\overline{MN}$ trecând prin I.

Se rotește figura în jurul diametrului AB; punctele M, N descriu două cercuri (M), (N) de centre m, n .

Știind că $r = 1$, să se calculeze aria și volumul trunchiului de con, înscris în sfera (O) și având ca baze cercurile (M) și (N).

O. N. Ț.

VI. 727. Intr'un cerc (O) de rază r se dă o coardă $\overline{AB} = a$. Se rotește coarda AB în jurul centrului de unghiul 2α , și obținem poziția $A'B'$ a ei. Să se arate că $AA'BB'$ este un trapez isoscel și să se calculeze *perimetrul* și *aria* lui.

2°. Considerând apoi un triunghi ABC echilateral înscris în cercul (O) și rotindu-l în jurul lui O de un unghi de 60° obținem un exagon $AA'BB'CC'$.

Luând $r = 1$, să se calculeze *aria* exagonului $AA'BB'CC'$.

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 648. Să se rezolve sistemul:

$$Z'_x = 0, \quad Z'_y = 0,$$

unde

$$Z(x, y) = \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos y + a.$$

C. I. B.

VII. 649. Să se găsească sumele seriilor:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{40} + \frac{1}{90} + \dots + \frac{1}{n^3 + 5n^2 + 6n} + \dots$$

și

$$\frac{7}{12} + \frac{9}{40} + \frac{11}{90} + \dots + \frac{2n+5}{n^3 + 5n^2 + 6n} + \dots$$

O. N. Ț.

VII. 650. Să se găsească suma seriei

$$\frac{1}{5 \cdot 21} + \frac{1}{5 \cdot 16} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots$$

$$+ \frac{1}{n^3 - 4n} + \frac{1}{n^3 - 9n} + \frac{1}{n^3 - 16n} + \dots$$

O. N. Ț.

VII. 651. $S_1, S_2, \dots, S_p$ însemnând sumele produselor a p numere $x_1, x_2, \dots, x_p$ luate respectiv câte unul, câte două, ..., câte p , să se găsească limita expresiei

$$E_m = \left(1 - \frac{S_1}{m} + \frac{S_2}{m^2} + \dots + (-1)^p \frac{S_p}{m^p} \right)^m$$

când m tinde la infinit.

O. N. Ț.

VII. 652. Fie sfera (O) de rază r și $\overline{SS'}$ un diametru al său. Se înscrie în sfera (O) conul de rotație cu vârful în S și unghiul de deschidere α , care are ca bază cercul (I) de diametru AB, apoi se înscrie cilindrul circular drept care are aceeași bază cu conul. Planul bazei superioare a cilindrului taie în con cercul (L) cu diametrul $\overline{EF}$. Să se studieze variația suprafeței laterale a trunchiului de con EABF astfel obținut.

O. N. Ț.

VII. 653. Să se studieze variația funcțiilor :

$$y = \frac{2 + \cos^2 x}{1 + 2 \cos x} \quad \text{și} \quad z = \frac{1 + \sin^2 x}{1 + 2 \sin x}$$

și să se reprezinte aceste variații în intervalul $(0, 2\pi)$, construind tangentele în punctele principale.

Să se deducă, din această reprezentare, câte rădăcini reale are în intervalul $(0, 2\pi)$ ecuația :

$$(2 + \cos^2 x)(1 + 2 \sin x) - (1 + \sin^2 x)(1 + 2 \cos x) = 0.$$

O. N. Ț.

VII. 654. Să se studieze variația funcțiilor

$$y = e^{x^2-x} \quad \text{și} \quad z = L\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

și să se deducă din reprezentare dacă ecuația

$$e^{x^2-x} - L\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 0$$

are rădăcini reale.

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. Exerc. 532. Să se rezolve grafic sistemul :

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y > 0$$

$$x^2 + y^2 - 25 < 0$$

$$y - x > 0.$$

C. I. B.

VIII. 533. Fie $f(x) = 0$ o ecuație reciprocă de grad par și $\varphi(y) = 0$ ecuația ce se obține prin transformarea $y = x + \frac{1}{x}$.

Să se demonstreze că dacă $f(x) = 0$ are *toate* rădăcinile *imaginare*, iar $\varphi(y) = 0$ *toate reale*, atunci rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ se găsesc pe cercul cu raza $r = 1$.

G. D. S.

VIII. 534. Să se afle numărul de rădăcini reale ale ecuației:

$$\sqrt[x]{a^5} - x\sqrt[5]{a^x} = 0 \quad ; \quad (a > 1).$$

G. D. S.

VIII. 535. (Preg. Bacal.) Intr'o sferă (O) de rază r , razele bazelor unui trunchiu de con înscris sunt văzute din centrul sferei sub unghiurile α și 2α .

Să se determine unghiul α astfel, ca *suprafața laterală* a trunchiului de con să fie față de *suprafața sferei* într'un raport dat k .

Punând $\sin \frac{\alpha}{2} = u$, să se determine în cazul particular $k = \frac{1}{6}$, cea mai mare valoare a lui u cu aproximație $< 0,01$.

O. N. Ț.

VIII. 536. Fie sfera (O) de rază r și $\overline{SS'}$ un diametru al său. Se înscrie în sfera (O) conul de rotație cu vârful în S, și având unghiul de deschidere α ; apoi se înscrie cilindrul circular drept având bază comună cu conul, în consecință el detașează din con un trunchiu de con. Să se determine α astfel ca *suprafața laterală* a trunchiului de con să fie $\frac{1}{32}$ din *suprafața sferei*.

O. N. Ț.

VIII. 537. Fie cercul (O) și o coardă NP a acestui cerc. Fie M punctul care determină pe coarda NP un raport dat, constant. Să se găsească și să se construiască, când coarda NP se deplasează paralel cu ea însăși, locul punctului M.

Să se generalizeze problema pentru o conică dată oarecare.

O. N. Ț.

VIII. 538. Se dă un cerc (O) de raza r , un diametru AB al său și triunghiul APB înscris în acest cerc.

Să se găsească ecuația locului piciorului M al bisectoarei unghiului PAB pe latura opusă, când P descrie cercul (O).

Scriind ecuația locului sub forma $y = f(x)$, să se studieze variația lui y și să se construiască locul punctului M.

O. N. Ț.

VIII. 539. Se dă un cerc (O) și un diametru AB al său. Prin B se duce coarda BN astfel ca $\widehat{NBA} = \alpha$, iar prin A coarda AM astfel ca $\widehat{MAB} = 2\alpha$, coardele AM și BN fiind de aceeași parte a lui AB.

a) Să se găsească, când α variază, locul punctului P, intersecția lui AM cu BN.

b) Locul punctului R, intersecția dreptelor AN, BM.

Scriind ecuația locului sub forma $y = f(x)$, să se studieze variația lui y și să se construiască locul lui R.

O. N. Ț.

Exerciții Generale. E. G. 436. Să se extragă rădăcina patrată a polinomului

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4.$$

GH. B.

E. G. 437. Să se rezolve ecuația

$$(x - a)^5 - (x - b)^5 + (a - b)^5 = 0.$$

GH. B.

E. G. 438. Dacă trei numere, care nu sunt cuburi perfecte, înmulțite între ele dau un produs cub perfect, acele numere nu pot fi coprime.

I. L.

E. G. 439. Care este codivizorul maxim al numerelor

$$18951941 \text{ și } 19411895.$$

I. L.

E. G. 440. Dacă patru numere nu se divid cu un număr dat, suma lor se poate divide cu acel număr?

Să se dea câteva exemple pentru numere de o cifră.

I. L.

E. G. 441. Care este comultiplul minim al numerelor

$$1895 \text{ și } 1941.$$

I. L.

E. G. 442. Anul nașterii și anul morții unei persoane sunt scrise cu aceleași cifre. Știind că vârsta acelei persoane nu a depășit o sută de ani, ce vârstă minimă și ce vârstă maximă ar fi avut acea persoană?

I. L.

E. G. 443. Se presupune că anul când a apărut primul număr al revistei *Gazeta Matematică* s'ar scrie cu cifrele $\alpha\beta\gamma\delta$, iar anul actual cu cifrele $abcd$; să se arate că între aceste cifre avem una din grupele de relații:

$$(I) \begin{cases} \alpha = a, \beta = b \\ \gamma = c - 4; \delta = d - 6 \end{cases} \quad \text{sau} \quad (II) \begin{cases} \alpha = a; \beta = b - 1 \\ \gamma = c + 5; \delta = d + 4. \end{cases}$$

I. L.

E. G. 444. Să se găsească un număr sau forma lui generală astfel ca față de divizorii 12, 15, 21 să dea resturile 5, 13, 16.

O. N. Ț.

ERRATĂ. Numerele exercițiilor propuse în numărul trecut se modifică astfel: La clasa III: 195—197, clasa IV: 616—619, clasa V: 725—729, clasa VI: 717—721, clasa VII: 641—647, clasa VIII: 526—531, E. G.: 427—435.

CONCURSUL DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a fost publicat în Nr. 1 al Suplimentului, iar primele probleme în Nr. 5)

8. Se dau 6 forțe: $F_1 = 1$ kg; $F_2 = 3$ kg; $F_3 = 5$ kg; $F_4 = 7$ kg; $F_5 = 9$ kg; $F_6 = 11$ kg aplicate respectiv în vârfurile A, B, C, D, E, F ale unui exagon regulat de latură $a = 4$ m. Să se determine rezultanta acestor forțe în următoarele cazuri:

(1) direcțiile forțelor date trec prin centrul exagonului și au sensul către acest centru.

(2) direcția forței F_1 este AB cu sensul dela A la B, direcția forței F_2 este BC cu sensul dela B la C, etc.

(3) toate forțele sunt perpendiculare pe planul exagonului și de același sens.

AL. ST.

9. Într'un punct O lucrează o forță cunoscută F_1 constantă în mărime și direcție. Să se determine o a 2-a forță F_2 cu punctul de aplicație tot în O , astfel încât rezultanta R a forțelor F_1 și F_2 să aibă o valoare constantă. Să se determine curba descrisă de extremitatea lui F_2 , atunci când R păstrându-și mărimea își modifică direcția.

G. T.

10. Un inel circular de rază a este alcătuit din 3 arce identice ca dimensiuni, dar executate din materiale diferite de greutate specifice

$$\rho_1, \rho_2 = 2\rho_1, \rho_3 = 3\rho_1.$$

Să se determine centrul de greutate al inelului.

AL. ST.

11. Într'un plan orizontal este așezat un sistem de 4 bare egale (AB, CD, EF, GH) de lungime $2l$ de greutate nulă, astfel încât capetele lor A, C, E, G sunt așezate pe niște reazime fine în planul orizontal, iar celelalte capete B, D, F, H se reazimă pe mijlocul uneia din celelalte bare (B pe mijlocul lui CD , D pe al lui EF , F pe al lui GH , H pe al lui AB). Pe bara FE se atarnă o greutate cunoscută P . Cât trebuie să fie distanța de la F la P pentru ca reazimul din A să suporte o forță egală cu $5P$.

G. T.

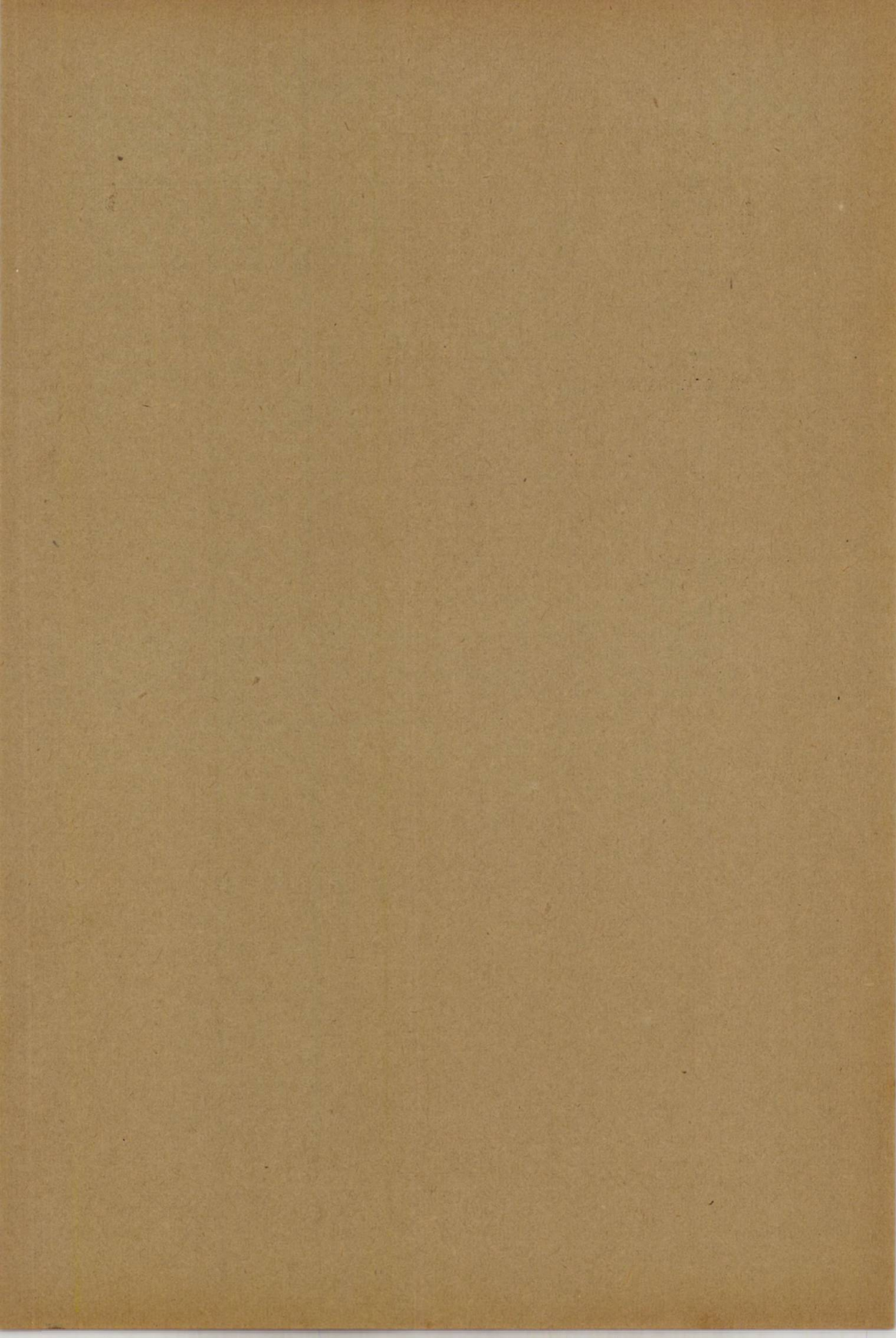
12. Se dau 2 bare omogene și egale AB și BC de lungime $2l$, de greutate G , articulate în B . Legăm capetele A și C cu un fir și atârnam întreg sistemul de A . Să se determine lungimea firului astfel încât bara CB să fie orizontală în poziția de echilibru. Să se determine tensiunea în fir în acest caz. Nu se ține seama de greutatea proprie a firului, nici de frecări.

G. T.

13. Un cilindru circular drept omogen este așezat pe un plan orizontal. De un punct al cercului bazei superioare a cilindrului se atarnă cu un fir o sferă omogenă executată din același material ca și cilindrul.

Elementele geometrice fiind cunoscute să se găsească condiția ca sfera să nu răstoarne cilindrul. Să se determine tensiunea în fir și reacțiunea dintre cilindru și sferă. Firul se va considera de greutate neglijabilă.

AL. ST.



INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății „Gazeta Matematică”.

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

- III. N. ABRAMESCU, Lecțiuni elementare de Algebră superioară, pentru clasa VIII-a științifică, Ediția VI-a Lei 120
- IX. G. EM. FILIPESCU, A. G. IOACHIMESCU, I. IONESCU, T. LALESCU și G. ȚIȚEA, Vocabular Matematic Lei 20
- X. G. ȚIȚEA, Culegere de Probleme de Geometrie Lei 150
- XI. GAZETA MATEMATICĂ 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) Lei 200
 - } pentru particulari Lei 200
 - } pentru abonații G. M. și S. G. M. Lei 150
- XII. V. CRISTESCU, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 95
- XIII. I. IONESCU, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raționată Lei 190
- XIV. V. CRISTESCU, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăogită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 125
- XV. A. G. IOACHIMESCU, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediția IV-a revăzută și mărită Lei 120
- XVI. G. ȚIȚEA, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediția II-a, adăogită de N. G. Botea Lei 140
- XVII. A. G. IOACHIMESCU, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediția IV-a, revăzută și mărită Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

- I. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile I—VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 160
- II. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 250
- III. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPICLUS și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEA”

- I. Ion IONĂSCU, *Maxime și minime geometrice* Lei 135
- Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa:

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 7

1 APRILIE 1942

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL VIII. No. 7

1 APRILIE 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCIȚII REZOLVATE

Exerciții Generale. E. G. 383. Să se calculeze expresia :

$$E = 3 \underbrace{\underbrace{\underbrace{3}_{(1)} \underbrace{[\dots]}_{(2)} \underbrace{[3+2] + 2^2}_{(3)}}_{(4)} + \dots + \underbrace{2^{n-1}}_{(n)} + 2^n.$$

I. L.

In general avem :

$$a \underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{(1)} \underbrace{[\dots]}_{(2)} \underbrace{[a+b] + b^2}_{(3)}}_{(4)} + \dots + \underbrace{b^{n-1}}_{(n)} + b^n$$

$$= a^n + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-2} + a \cdot b^{n-1} + b^n.$$

Punând $x = \frac{a}{b}$ avem :

$$S = x^n + x^{n-1} + \dots + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{b} - 1}.$$

In cazul exercițiului No. 383 avem :

$$a = 3 \text{ și } b = 2.$$

Atunci :

$$E = 2 \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right].$$

I. L.

E. G. 384. Dacă a și b sunt numere prime cu 11, să se determine valorile lui k pentru care suma :

$$a^4 + k \cdot b^4$$

este divizibilă cu 11.

I. L.

Numerile a și b pot avea formele:

$$M11 \pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; \pm 5.$$

Bipatratele lor vor avea formele:

$$M11 + 1 ; + 5 ; + 4 ; + 3 ; + 9.$$

Va trebui să avem deci:

$$(1 + k) ; (1 + 5k) ; (1 + 4k) ; (1 + 3k) ; (1 + 9k)$$

$$(5 + k) ; (5 + 4k) ; (5 + 3k) ; (5 + 9k)$$

$$(4 + k) ; (4 + 5k) ; (4 + 3k) ; (4 + 9k)$$

$$(3 + k) ; (3 + 5k) ; (3 + 4k) ; (3 + 9k)$$

$$(9 + k) ; (9 + 5k) ; (9 + 4k) ; (9 + 3k)$$

toți M11.

In cazul lui k minim și pozitiv, obținem :

$$k = 2, 6, 7, 8, 10.$$

I. L.

E. G. 387. Dacă numerele a și b sunt întregi și pozitive, iar $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i , în ce caz avem :

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} - [\varphi(b)]^{\varphi(a)} = M(a \cdot b) ?$$

I. L.

I. Dacă $\varphi(a)$ și b sunt prime între ele avem :

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} = M \cdot b + 1.$$

Dacă $\varphi(b)$ și a sunt prime între ele avem :

$$[\varphi(b)]^{\varphi(a)} = M \cdot a + 1.$$

II. Dacă a și b sunt numere prime impare, atunci avem :

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} = Ma + 1$$

și

$$[\varphi(b)]^{\varphi(a)} = Mb + 1.$$

Prin urmare o condiție ar fi ca a și b să fie *numere prime impare*.

Observație. Condiția dată de exercițiul 387, poate duce la forme mult mai complicate pentru numerele a și b , sau la o demonstrație că înafară de cazul de mai sus, nu avem alte forme. Un astfel de studiu iese însă din cadrul Suplimentului G. M.

I. L.

E. G. 388. Câte bicuburi de 12 cifre sunt divizibile cu 13?

I. L.

Avem :

$$10^{11} \leq (13 \cdot n)^6 < 10^{12}$$

$$\therefore 10^{1,8333...} \leq 13 \cdot n < 100.$$

Cum prin logaritmi constatăm că :

$$10^{1,8333...} = 66,57...$$

urmează că vor avea 12 cifre numai multiplii :

$$78 \text{ și } 91.$$

I. L.

E. G. 389. Suma a două bicuburi poate să fie divizibilă cu 11?

I. L.

Excludem cazul când cele două bicuburi sunt M11.

Față de 11 resturile unui bicub sunt :

$$1, 9, 3, 4, 5.$$

Deci luând două câte două și însumându-le, constatăm că nu găsim M11.

Deci suma a două bicuburi nu se poate împărți exact cu 11, decât dacă, fiecare din ele este divizibil cu 11.

I. L.

E. G. 390. Suma a trei bicuburi poate să fie divizibilă cu 11?

I. L.

Ținând seamă de soluția dată *E. G. 389*, putem afirma că:
Suma a trei bicuburi poate să fie divizibilă cu 11 în multe cazuri.

I. L.

E. G. 392. Câte secunde a împlinit Gazeta Matematică dela apariția ei (15 Septemvrie 1895) până la 15 Septemvrie 1941?

I. L.

În 4 ani avem:

$$(3 \times 365 + 366) \times 24 \times 60 \times 60 = 126.230.400 \text{ sec.}$$

Apoi 46 de ani are: 11 perioade cu 126.230.400 secunde și 2 perioade numai cu:

$$3 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60$$

adică cu:

$$189.216.000 \text{ secunde.}$$

În total deci:

$$1.577.750.400.$$

I. L.

Până la 1 Martie 1942 s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în numerele 3, 4, 5 dela*):

Liceul de fete „Carmen-Sylva”, București.

Clasa IV-a: KOGĂLNICEANU M. OLGA (E. G.: 420).

Clasa VI-a: DAMIAN C. LUCIA (VI: 710, E. G.: 410, 5, 43), IONESCU G. M. (E. G.: 418), STOICESCU P. VIORICA (VI: 715, E. G.: 443).

Institutul Ortodox de fete, București.

Clasa V-a: MATEESCU MIHAELA (V: 725, (E. G.: 428, 30).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asterisc.

Liceul Elena Ghiba Birta, Arad.

Clasa V-a : PETRU V. DOINA (V : 720).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa VII-a : LUNGU C. MARIA (VII : 639), MIHĂILEANU ST. FLORICA (VII : 639, 40).

Clasa VIII-a : PUȚUREANU C. ELENA (VIII : 520, 3, 4).

Gimnaziul „Iulia Hasdeu“, Hotin.

Clasa IV-a : DUBCEAC G. LUDMILA (E. G. : 425).

Liceul „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa IV-a : ALBU D. AURELIA (IV : 611, 4).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa V-a : GEORGACOPOL E. D. (V : 728, 9, E. G. : 424), SOARE V. M. (V : 720, 3, 5*, 9).

Clasa VI-a : BÂLCU N. (VI : 710), HORBUNIEV P. V. (VI : 710, E. G. : 409*, 10*), MIZICU V. M. (VI : 712, 4, 6).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VI-a : TIMOTIN A. (VI : 705, 6, E. G. : 409, 10, 5).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa V-a : IEȘAN S. A. (V : 728*, 32).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI G. D. (III : 192, 5, E. G. : 420).

Clasa VII-a : GRIGORIU N. N. (VII : 629), RONALDO C. D. (VII : 635), TĂNĂSESCU G. V. (VII : 638, 9, 40).

Clasa VIII-a : CORBARU A. D. (VIII : 524, 5), SENI C. (VIII : 518, 9, 20, 3, 4, 5, E. G. : 418, 9, 20, 1, 3, 5, 7, 9, 33).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa IV-a : TIMIȘ A. D. (IV : 614).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa IV-a : BARBAIANI M. (IV : 610, 1, E. G. : 404, 9, 15, 6).

Clasa V-a : CUȘUTĂ H. H. (V : 720*).

Clasa VIII-a : MĂNESCU G. I. (VIII : 516, 24, 5), NICOLAESCU G. A. (VIII : 518, 20, 3, E. G. : 420).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa VII-a: ARON I. G. (VII: 632, VIII: 513, E. G.: 409, 10, 1, 3, 4, 5, 6).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa V-a: CRISTESCU G. A. (V: 721*, 3).

Clasa VI-a: HORBUNIEV P. V. (VI: 705).

Clasa VII-a: CONSTANTINESCU I. E. (VII: 627, 32, E. G.: 409*, 10*, 5, 6),
CONSTANTINESCU M. (VII: 627, E. G.: 409*, 10*, 1, 3, 5, 6, 8, 32*), NICULESCU
P. (VII: 627, 37, 9, 40).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa VI-a: ILIESCU G. I. (VI: 711), IONESCU G. I. (E. G.: 409, 15, 6,
8, 9, 23*, 6*), IONESCU G. T. (E. G.: 418, 9, 23), SIMOTA N. H. T. (VI: 703).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a: BOCIORT F. I. (V: 725), SCHIOPU R. I. (V: 725, 7, 9).

Clasa VII-a: ORĂDEANU T. T. (VII: 639, 40).

Liceul „Regele Ferdinand I“, Bacău.

Clasa VI-a: FĂNARU N. D. (VI: 715, 6, E. G.: 420).

Liceul „Samuil Vulcan“, Beiuș.

Clasa V-a: LOGOFĂTU M. T. (V: 721*, 7, 8*, 9), SASU I. I. (V: 721*,
7, 9, E. G.: 418, 9, 20, 3).

Liceul „N. Bălcescu“, Brăila.

Clasa V-a: BOERESCU N. C. (V: 722*, 3, 5, 7, 8*, 9*, E. G.: 419, 20,
3, 5, 6).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă“, Brașov.

Clasa VII-a: STELIAN F. (E. G.: 427, 32, 3).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa VIII-a: MUSCELEANU D. (VIII: 513, 8, 9, 20, 3, E. G.: 418, 9,
20, 1, 3, 5, 6).

Liceul „Știrbey Vodă“, Călărași-Ialomița.

Clasa VII-a: CULEA I. D. (VII: 639, 40).

Liceul „D. B. Știrbey“, Câmpina.

Clasa VIII-a: TUDOSE C. I. (VIII: 525).

Liceul „Aron Pumnul“, Cernăuți.

Clasa VIII-a: DIACONU P. A. (VIII: 518, 9, 20, 3, 4, 5, E. G.: 418*, 9*, 20*, 2*, 3*, 4, 5*, 6*), SĂHLEANU V. (VIII: 518, 9, 20, 3, 4, 5, E. G.: 418*, 9, 20, 3*, 4, 5*, 6*).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Cernăuți.

Clasa VI-a: STAICU (VI: 706, 7, 11, 2, 6).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa V-a: CÂRSTEA D. M. (V: 709, 20, 3, 5, E. G.: 425, 7, 33), CHIRIAC M. V. (V: 723), GHINȚEI G. (V: 709), NICOLICIORI S. D. (V: 709), PAVICA A. V. (V: 726), POPA A. N. (V: 709, 20, 3, 7), RUSU T. N. (V: 709, 725), ULMET V. V. (V: 709).

Clasa VIII-a: MATEESCU A. (VIII: 519), MUSCELEANU I. (VIII: 513, 4, 6, 8, 20, 3, 5, E. G.: 401, 2, 4, 7, 9, 10, 3, 5, 6, 8, 20, 1, 3, 4, 5, 6).

Elev particular, Craiova.

Clasa VII-a: IONESCU P. (VII: 632, E. G.: 410, 1*, 5, 6).

Liceul „Radu Negru“, Făgăraș.

Clasa VI-a: FÂNTÂNĂ N. N. (E. G.: 420).

Liceul Militar, Iași.

Clasa IV-a: BĂRSESCU M. (E. G.: 418, 20, 3), CIUMAȘU V. (E. G.: 418, 23), IFRIM AL. (E. G.: 418, 20, 3), NETEDU D. (E. G.: 418, 20, 3), RADU M. CONST. (E. G.: 418, 23), STAN C. (E. G.: 418, 20), ȘTEFĂNESCU A. (E. G.: 418, 23).

Clasa VI-a: ANDARACHI I. (VI: 715, E. G.: 418, 23, 6), ANDREESCU M. (VI: 715, 6, (E. G.: 409, 18, 9, 23, 4, 5, 6), ANDREI GH. A. (VI: 715, 6, E. G.: 409, 418, 19, 23, 4, 5, 6), ARDELEANU G. (VI: 715, 6), BOSINCEANU C. (E. G.: 409, 18, 9, 20, 3, 5, 6), BACIU D. (VI: 715), COROIU I. D. (VI: 715, 6, E. G.: 418, 9, 23, 5, 6), CECALĂ I. (715, 6), CHIRICĂ A. N. (VI: 715, 7), CHIRULESCU D. (VI: 715, 6), DRAGOMIR C. (VI: 715), GHEORGHIU N. ȘT. (VI: 715, 6, E. G.: 414, 8, 9, 20, 3, 5, 6), GANEA N. (VI: 715, 6), IONESCU M. (VI: 716, E. G. 418, 20, 3, 6), MUTIHAC V. (VI: 715, 6), NAGU M. (VI: 715, 6), OPRAN M. (VI: 715), PETRACHE L. (VI: 715), POPA N. N. (VI: 715, 6, E. G.: 418, 9, 20, 3, 5, 6), POIU I. V. (VI: 715, 6), RĂDULESCU M. (VI: 715, 6), TEODORESCU C. (VI: 715, 6), TOMESCU D. M. (VI: 715, 6), TURCULEȚ T. (VI: 711, 5, 6, E. G.: 409, 18, 9, 20, 3, 4, 5, 6), VĂIDEANU G. (VI: 715), VASILIU D. (696, 715, E. G.: 413, 4, 6, 8, 9, 20, 3, 4, 5, 6), ZAHARIA M. (VI: 715, 6).

Clasa VIII-a: IACOMI D. M. (E. G.: 418, 9), IVAN C. Z. (E. G.: 420, 6).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a: DONȚU G. G. (VII: 634, 7, 8, 9, 40).

Liceul Internat, Iași.

Clasa VIII-a: MANOLACHE M. (VIII: 518, 24, 5, E. G.: 427, 32).

Colegiul Național Militar, Predeal.

Clasa III-a: PUCHIN I. (III: 192).

Clasa IV-a: VULCAN V. (E. G.: 418).

Clasa V-a: COLUMBEANU P. (V: 725, E. G.: 420), VOLANSKI A. D. (V: 723).

Clasa VII-a: ANASTASESCU I. A. (E. G.: 420, 3), BUNESCU N. G. (E. G.: 419, 29, 30, 3), IONESCU-BERECHET F. F. (VII: 632), GRIGORIU N. N. (VII: 640), NICULESCU C. C. (VII: 632), NICOLAE A. (VII: 632, 40), PITIȘ L. N. (VII: 634), STOIANOVICI I. ȘT. (VII: 620, 34, 6, 7, 9, VIII: 516, E. G.: 419, 29, 30, 3), ȚINCULESCU C. N. (VII: 632), VLĂDOIANU T. R. (VII: 634, 9, 40).

Clasa VIII-a: ALDEA V. V. (VIII: 524, 5, E. G.: 420, 5), FLOREȘTEANU D. A. (E. G.: 423).

Liceul „Regele Ferdinand“, Râmnicu-Sărat.

Clasa VIII-a: TĂNĂȘESCU I. G. (VIII: 520, 3).

Liceul Militar „Mihai Viteazu“, Timișoara.

Clasa V-a: CHIRIAC N. V. (V: 729), ENĂCHESCU I. (VI: 715, 6), GRIGORESCU I. (V: 725, 9), MOINESCU A. C. (E. G.: 407), NEDELICU N. (V: 725, 9), PAVICA V. (V: 720, 8*, 9, E. G.: 420).

Clasa VI-a: BLĂJAN C. (VI: 702, 3, 4), CĂPRIȚĂ I. (VI: 702), ȘTANCU M. I. (VI: 703, 4, VII: 618).

Clasa VII-a: MOLDOVAN T. I. (VII: 635, 9, 40), OPREA G. (VII: 637).

Clasa VIII-a: COMAN I. L. (VIII: 506, E. G.: 404, 7).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa V-a: TINCU C. C. (V: 720).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1942

Clasa III-a. Exerc. 201. Se împarte un cerc (O), de rază R, în șase părți egale prin punctele A, B, C, D, E, F.

Prelungim razele $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OE}$ respectiv cu $\overline{AA'} = \overline{OA}$, $\overline{CC'} = \overline{OC}$, $\overline{EE'} = \overline{OE}$. Să se arate, că:

- a) Triunghiul $A'C'E'$ are laturile sale tangente cercului (O).
- b) Aria lui este cât dublul ariei exagonului regulat înscris în cercul (O).

O. N. Ț.

III. 202. Fie cercul (O) de rază r ; punctele A, B, C, D, E, F care îl împart în șase părți egale; B' și E' respectiv mijloacele arcelor EF și BC; N și R punctele unde dreapta CF taie pe BB' și EE' . Să se arate că segmentul NR este egal cu diferența între latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O) și raza acestui cerc.

O. N. Ț.

III. 203. Fie un cerc (O) de rază r ; punctele A, B, C, D, E, F care împart cercul în șase părți egale, A' , B' , C' , D' , E' , F respectiv mijloacele arcelor DE, EF, FA, AB, BC, CD; apoi M, N, P, Q, R, S respectiv intersecțiile perechilor de drepte (AA' , OE); (BB' , OF); (CC' , OA); (DD' , OB); (EE' , OC); (FF' , OD).

Să se arate că exagonul MNPQRS este un exagon regulat și să se calculeze latura lui cu aproximație $< 0,01$, când $r = 1$.

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 624. În jurul soclului unei statui este o scară de marmură, care urcă până la înălțimea 0,8 m a soclului măsurată de la pământ. Fiecare treaptă a scării are înălțimea 0,2 m și lățimea ei mai mică decât a precedentei cu $\frac{1}{3}$ din lățimea acesteia.

Știind că, pe pământ, de unde începe prima treaptă și până la soclu este o distanță de 0,544 m, să se afle lățimile treptelor scării.

O. N. Ț.

IV. 624. Pe fețele laterale ale piramidei triunghiulare $SABC$ se așează un fir de lungime dată l , pe rând, astfel ca pe fiecare față să formeze un triunghi având două din laturi pe muchiile laterale, iar a treia paralelă cu latura bazei. Fie SA_1B_1 , SB_2C_1 , SC_2A_2 cele trei așezări ale firului pe cele trei fețe. Să se determine segmentele firului pe fiecare față.

De ce proprietate trebuie să se bucure fețele laterale ale piramidei pentru ca punctele A_1 cu A_2 , B_1 cu B_2 , C_1 cu C_2 să coincidă?

Să se calculeze în acest caz perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$.

O. N. Ț.

IV. 625. Pe fețele unei piramide triunghiulare $SABC$, se așează un fir de lungime dată l , pe rând, în formă de contur poligonal AA_1B_1B , BB_2C_1C , CC_2A_2A , astfel că două din laturile conturului sunt pe muchiile feței laterale, iar a treia paralelă cu baza acelei fețe. Să se calculeze cele trei segmente ale firului pentru fiecare față laterală.

Să se stabilească relațiile de legătură între lungimile celor șase muchii ale piramidei pentru ca punctele A_1 cu A_2 , B_1 cu B_2 , C_1 cu C_2 să coincidă.

O. N. Ț.

IV. 626. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \frac{x+y-1}{-x-y+1} + \frac{3(x-y)+1}{3(x-y)-1} = \frac{1}{1-3x+3y} - \frac{1}{1-x-y} \\ \frac{3x+3y-2}{1-2x-2y} + \frac{6(x-y)+2}{4(x-y)-1} = \frac{2}{1-4x+4y} - \frac{2}{1-2x-2y} \end{cases}$$

O. N. Ț.

Clasa V-a. Exerc. 735. În triunghiul ABC , un cerc oarecare dus prin B , C taie bisectoarea unghiului A în I , J .

Avem

$$\sphericalangle IBJ = C + \frac{A}{2} + \sphericalangle IBC - \sphericalangle ICB.$$

Caz particular:
$$x = \frac{B}{2}.$$

N. M.

V. 736. Să se rezolve ecuația

$$\frac{5}{8x} - \frac{1}{90} = \frac{3}{80} + \frac{1}{2x^2}.$$

N. M.

V. 737. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$x^2 - \frac{24}{a-6}x - \frac{26}{a-6} = 0,$$

după valorile pozitive ale lui a .

GH. B.

V. 738. Să se rezolve ecuația

$$\frac{3}{(x+2)(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-3)}.$$

GH. B.

V. 739. În triunghiul ABC , echilateral, de latură l , fie $\overline{BD}$ perpendiculară pe $\overline{BC}$ și egală cu ea.

Să se calculeze $\overline{AD}$.

N. M.

Clasa VI-a. Exerc. 728. Fie un cerc (O) de rază r , punctele A, B, C, D, E, F care împart cercul (O) în șase părți egale; A', B', C', D', E', F' respectiv mijloacele arcelor DE, EF, FA, AB, BC, CD ; apoi M, N, P, Q, R, S respectiv intersecțiile perechilor de drepte

$(AA', OE); (BB', OF); (CC', OA); (DD', OB);$

$(EE', OC); (FF', OD).$

1°. Să se arate că:

a) exagonul $MNPQRS$ este exagon regulat;

b) latura exagonului $MNPQRS$ este egală cu diferența între jumătatea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul (O) și apotema lui.

2°. Să se calculeze aria exagonului $MNPQRS$.

O. N. Ț.

VI. 729. Fie un cerc (O) de rază r ; A, B, C, D, E, F punctele care împart cercul (O) în șase părți egale; A', B', C', D', E', F' puncte luate respectiv pe arcele DE, EF, FA, AB, BC, CD astfel că: $\text{arc DA}' = \text{arc EB}' = \text{arc FC}' = \text{arc AD}' = \text{arc BE}' = \text{arc CF}' = 2\alpha$; apoi punctele M, N, P, Q, R, S de intersecție ale perechilor de drepte

$$(AA', OE); (BB', OF); (CC', OA); (DD', OB); \\ (EE', OC); (FF', OD).$$

1°. Să se arate:

a) că exagonul MNPQRS este un exagon regulat;

$$b) \text{ că } \overline{MN} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \left[\cotg(60^\circ - \alpha) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right];$$

c) care este aria exagonului MNPQRS.

2°. Să se examineze proprietatea când punctul M, N, P, Q, R, S sunt definite ca fiind intersecțiile

$$(AA', OF); (BB', OA); (CC', OB); (DD', OC); \\ (EE', OD); (FF', OE)$$

și să se găsească expresia laturii $\overline{MN}$.

3°. Să se generalizeze pentru un număr de n puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$ care împart cercul în n părți egale.

O. N. Ț.

VI. 730. Să se construiască o piramidă triunghiulară SABC, oarecare, având baza dată ABC și știind că înălțimile fețelor laterale SAB, SBC, SCA, corespunzătoare laturilor AB, BC, CA, sunt egale.

1. Dându-se *măsura comună* a înălțimilor egale și măsurile celor trei laturi ale bazei ABC, să se calculeze volumul piramidei SABC.

2. Prin vârful A să se ducă un plan (P) de secție, paralel cu BC și care să împartă piramida SABC în două solide echivalente.

3. Să se găsească distanța planului (P) la vârful S.

4. Să se ia pentru datele problemei valori numerice și să se efectueze toate calculele cu o aproximație dată.

O. N. Ț.

VI. 731. Se dă tetraedrul SABC, muchia laterală SC fiind perpendiculară pe baza ABC. Să se determine planul (P), care trecând prin AB face cu planul ABC un unghi φ .

Să se calculeze distanța planului (P) la vârful S.

Aplicație :

$$\overline{AB} = 20 \text{ cm}; \overline{BC} = 24 \text{ cm}; \overline{CA} = 32 \text{ cm}; \overline{SC} = 60 \text{ cm}; \varphi = 45^\circ.$$

O. N. Ț.

VI. 732. O piramidă SABC are muchia SA înălțime, iar înălțimea feței SBC se proiectează pe baza ABC după mediana AD a triunghiului ABC. Știind că $\overline{SA} = h$, că planul SBC este înclinat de unghiul α pe planul bazei ABC și că unghiul celorlalte două fețe laterale este 2β , să se calculeze:

a) Aria laterală a piramidei SABC;

b) Volumul acestei piramide;

c) Distanța feței SBC la vârful A.

Aplicație :

$$h = 12 \text{ cm}; \alpha = 15^\circ; \beta = 60^\circ.$$

O. N. Ț.

VI. 733. Să se construiască o piramidă SABC cunoscând măsura h a înălțimii SA, unghiurile α, β, γ pe care le fac muchiile SA, SB, SC cu planul bazei ABC și lungimile laturilor AB, BC ale acestei baze.

Câte soluții are problema?

Să se calculeze volumul și aria laterală pentru fiecare soluție în parte.

Aplicație :

$$h = 10 \text{ cm}; \alpha = 60^\circ; \beta = 30^\circ; \gamma = 45^\circ; \overline{AB} = 8 \text{ cm}; \overline{BC} = 6 \text{ cm}$$

O. N. Ț.

Clasa VII-a. Exerc. 765. Să se studieze variația funcției:

$$y = e^{x^2} - x^2 + a$$

și să se reprezinte această variație.

O. N. Ț.

VII. 766. Să se studieze variația funcției:

$$y = e^{P(x)} - P(x) + k,$$

unde $P(x)$ este un polinom, a cărui derivată are toate rădăcinile *reale* și *simple*, ca și el (polinomul). [Se știe că între două rădăcini reale ale polinomului este cel puțin o rădăcină a derivatei și că un polinom are atâtea rădăcini câte unități are gradul său].

O. N. Ț.

VII. 767. Să se studieze pentru $0 \leq x \leq 2\pi$, variația funcției,

$$y = e^{\cos x} + \cos x - 1$$

și să se reprezinte această variație.

O. N. Ț.

VII. 768. x și y fiind două numere variabile pozitive legate prin relația

$$x^p + y^p = a^p, \quad (p \text{ întreg } > 0),$$

să se studieze variația funcției:

$$z = x^m + y^m,$$

unde m este un număr pozitiv, mai mare sau mai mic ca 1.

O. N. Ț.

VII. 769. Să se arate că seria

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2n(2n+2)(2n+4)} + \dots$$

este convergentă.

O. N. Ț.

VII. 770. Să se arate că seria:

$$1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{k^n} \cdot \frac{1}{n!} + \dots,$$

unde $k \geq 1$, este o serie convergentă.

O. N. Ț.

VII. 771. Să se studieze variația funcției:

$$y = kx - \operatorname{arctg} x.$$

O. N. Ț.

Clasa VIII-a. Exerc. 540. Să notăm cu M, N punctele de intersecție ale polarei unui punct S în raport cu o parabolă dată.

Se cere locul geometric al punctului S astfel ca aria triunghiului SMN să fie constantă.

G. D. S.

VIII. 541. Fie F focarul unei parabole, M un punct mobil pe ea și A un punct fix pe axa de simetrie.

Să se găsească locul geometric al intersecției dreptei MF cu paralela dusă prin A la tangenta în M.

Să se dea și o soluție geometrică.

G. D. S.

VIII. 542. Fie două puncte fixe A, B, o dreaptă fixă Δ și un punct P variabil pe dreapta (Δ). Să însemnăm cu M al doilea punct de intersecție al cercurilor descrise pe $\overline{AP}$ și $\overline{BP}$ ca diametre.

Să se găsească și să se construiască locul punctului M.

O. N. Ț.

VIII. 543. Se consideră un sector de cerc AOB și punctele C și D care împart arcul AB în trei părți egale: $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$.

Pe razele OA și OB se mișcă respectiv punctele E și F, astfel ca suma distanțelor lor la centrul O să fie tot timpul egală cu raza cercului.

Să se găsească și să se construiască locul punctului M de întâlnire al dreptelor ED, CF.

Generalizare.

O. N. Ț.

VIII. 544. Să se rezolve ecuația:

$$x^8 - 10x^6 - 3x^5 + 30x^4 + 24x^3 - 16x^2 - 48x - 32 = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 545. Să se rezolve ecuația:

$$4x^8 - 8x^7 - 71x^6 + 5x^5 + 235x^4 + 124x^3 - 203x^2 - 201x - 45 = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 546. Să se rezolve ecuația:

$$2x^8 + (2\lambda + 5)x^7 + 5(\lambda - 3)x^6 - (17\lambda + 28)x^5 - 3(11\lambda - 2)x^4 + \\ + (23\lambda + 31)x^3 + (64\lambda + 51)x^2 + (28\lambda + 64)x + 28 = 0.$$

O. N. Ț.

VIII. 547. Să se determine numărul punctelor de intersecție reale ale curbelor:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 5y^2 - 4x + 4y = 0 \\ 3x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Să se determine punctele de intersecție cu coordonatele raționale.

O. N. Ț.

Exerciții Generale. E. G. 445. Să se arate că:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = 3 \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)$$

$$\sin(2k + 1)\frac{5\pi}{12} = \sin(2k + 1)\frac{7\pi}{12}$$

$$\sin \frac{8k\pi}{5} + \sin \frac{2k\pi}{5} = 0$$

$$\sin \frac{4(2k \pm 1)\pi}{3} + \sin \frac{(2k \pm 1)\pi}{3} = 0.$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 446. Să se arate că:

$$\sin \frac{2k\pi}{3} + \sin \frac{4k\pi}{3} + \sin \frac{6k\pi}{3} = 0$$

$$\sin \left(k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right) + \sin 2 \left(k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right) + \sin 3 \left(k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\sin 2(k\pi - a) - \sin(2k\pi - a) + \sin a = 0.$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 447. Să se arate că:

$$\sin \left(k\pi + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(k\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\cos \left(k\pi + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(k\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{4}.$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 448. Să se arate că:

$$\cos \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\cos \left(k\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(k\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = 1$$

$$\cos \left(k\pi + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(k\pi + \frac{\pi}{3} \right) = 2$$

$$\sin \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} \cos \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \right) = 2$$

$$\sin \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} \cos \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\sin \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) + \cos \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1).$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 449. Să se arate că :

$$2 \sin^2 (2k+1) \frac{\pi}{2} + \sin^2 (2k+1) \pi = 2$$

$$\sin^2 \left(k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \right) - 2 \cos^2 \left(k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \left(\frac{a}{2} + k\pi \right) + \sin^2 \left(\frac{a}{2} - k\pi \right) = 1 - \cos a.$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 450. Să se arate că :

$$\operatorname{tg} \left(3k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(k\pi \pm \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{12} \right) + \operatorname{cotg} \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \right) = 8 \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \right).$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 451. Se se arate că :

$$\operatorname{tg}^2 \left(k\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{4} + a \right) \cdot \operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{\pi}{4} - a \right)$$

$$\operatorname{cotg} \left(k\pi + \frac{a}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(k\pi + \frac{a}{2} \right) = \sin \left(k\pi + \frac{a}{2} \right) + \cos \left(k\pi + \frac{a}{2} \right).$$

COMANDOR GR. Z.

E. G. 452. In extremitatea A, a segmentului de dreaptă OA, se ridică o perpendiculară pe care se iau cinci puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 astfel ca unghiurile $A_1AO, A_2AA_1, A_3AA_2, A_4AA_3, A_5AA_4$ să fie toate egale între ele și egale cu 15° .

Să se calculeze lungimile: $OA_1, OA_2, \dots, OA_5, AA_1, AA_2, \dots, AA_5$ în funcție de $\overline{OA} = a$.

GH. B.

E. G. 453. Un număr adunat cu pătratul lui și cubul lui dă numărul 37059. Care este acel număr.

O. N. Ț.

CONCURSUL DE MECANICĂ

(Regulamentul concursului a fost publicat în Nr. 1 al Suplimentului, iar primele probleme în Nr. 5 și 6)

14. Aplicând o forță constantă orizontală $F = 120$ kg. asupra unui corp aflat în repaos pe un plan lucios orizontal, observăm că după timpul $t = 7$ secunde corpul a străbătut o distanță rectilinie $s = 56$ m. Să se determine greutatea acestui corp.

AL. ST.

15. Să se determine în Kw și C.P. puterea necesară unei pompe care scoate 4,5 metri cubi apă pe secundă dintr'o fântână adâncă de 5,8 m. cunoscând randamentul 0,8 al motorului.

AL. ST.

16. Un automobil de greutate $P = 1500$ kgr, în mișcare rectilinie cu iuțeala $v = 90$ km/oră se lovește de un obstacol și se oprește. Să se calculeze energia cinetică a automobilului în momentul ciocnirii și să se exprime valoarea ei în kgm, ergi, jouli, cai-oră și Kw-oră.

Presupunând că această energie cinetică s'ar întrebuința la ridicarea pe verticală a automobilului să se determine la ce înălțime poate fi ridicat.

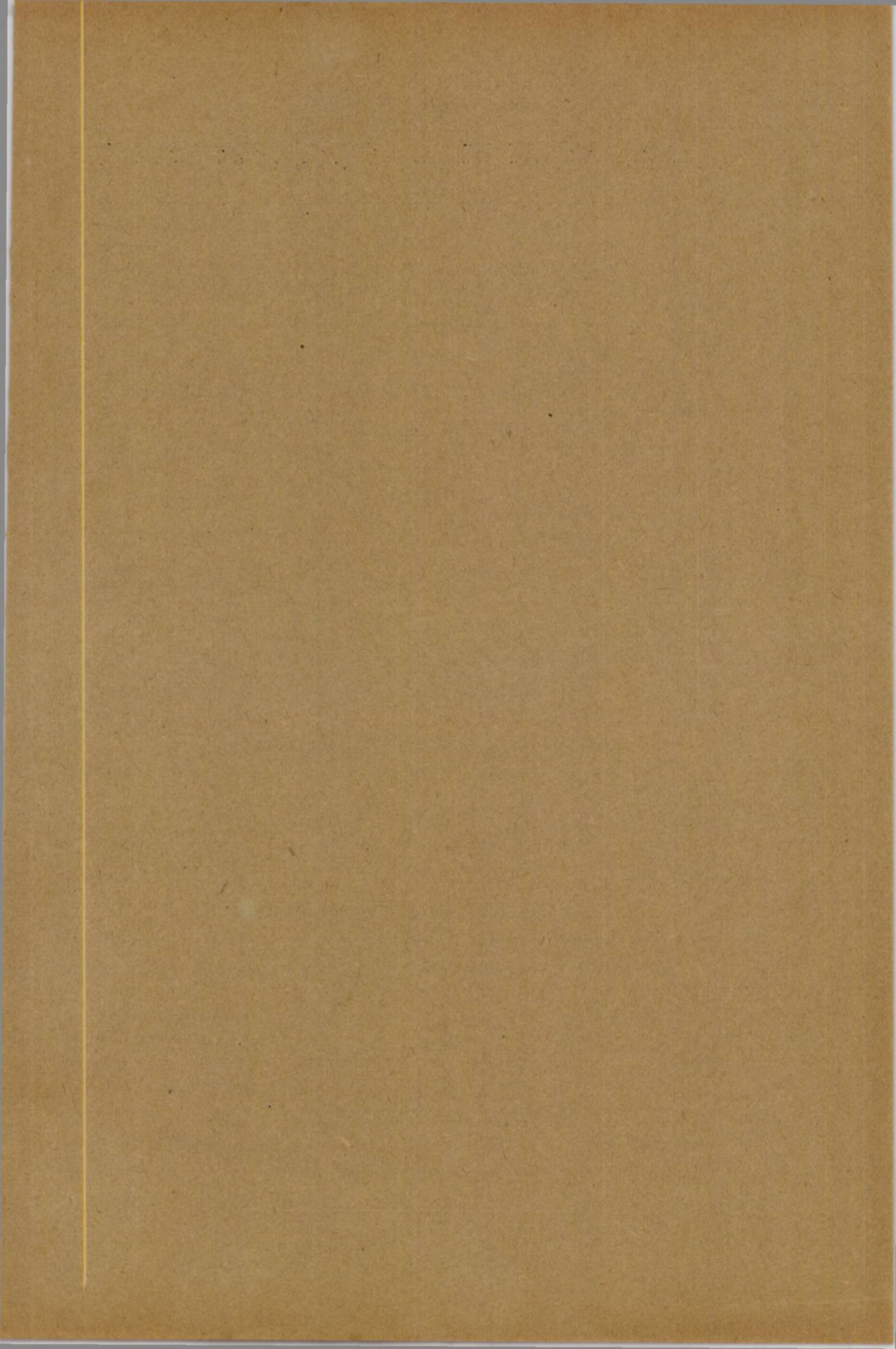
AL. ST.

17. Peste un scripete este trecut un fir de care atârnă în fiecare parte câte 2 greutateți egale cu G . La început sistemul e în repaos, cu greutatețile la înălțimea h deasupra solului. Din partea stângă se desparte și cade o primă greutate. Sistemul începe să se miște. Când a parcurs o distanță egală cu $\frac{h}{2}$, se desparte și din dreapta o greutate. Să se determine timpul necesar ca greutatea din dreapta care mai atârnă de fir să ajungă la sol.

G. T.

18. O lampă de masă are un abajur în formă de trunchiu de con cu $r = 10$ cm, $R = 15$ cm, $h = 20$ cm. De circumferința inferioară de rază R sunt atârnați niște ciucuri, formați dintr'o mărgea de greutate 10 grame, atârnată de un fir lung de 2 cm fără greutate proprie. Să se determine viteza unghiulară cu care trebuie învârtită lampa în jurul piciorului său (care este și axa conului) pentru ca ciucurii să se așeze în lungul generatoarei conului. Să se determine în acest caz tensiunea în firul ciucurilor. (Se va putea lua $g = 10 \text{ m/sec}^2$).

G. T.



INSTRUCTIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele :

III. N. Abramescu, *Leccióni elementare de Algebră superioară*, pentru
clasa VIII-a științifică, Editia VI-a . Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și	Lei 120
G. Titeica, Vocabular Matematic	Lei 20

X. G. Tîţea, Culegere de Probleme de Geometrie . . .	Lei 150
--	---------

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) pentru particulari Lei 200
 pentru abonatii G. M. și S. G. M. Lei 150

XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 95

XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională Lei 190

XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu. Lei 125

XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I.	Lei 120
Ediția IV-a revăzută și mărită	Lei 120

XVI. **G. Țițeica**, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I.
 Ediția II-a, adăugită de **N. G. Botea**

XVII. **A. G. Ioachimescu**, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a.
 Ediția IV-a, revăzută și mărită Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui Euclid.* (Cărtile I — VI de Geometrie plană) tradusă
din limba greacă de *V. Marian* Lei 160

II. *Elementele lui Euclid*. (Cărtile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 250

III. **Elementele lui Euclid.** (Cărtile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPICLÉ și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE TÎTEICA”

1. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* Lei 135

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa :

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică. — Calea Grivitei No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIIII

ANUL VIII. No. 8

1 MAI 1942



SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9803

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

ADITAM PAE ADEAD

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCII

ANUL VIII. No. 8

1 MAI 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCII REZOLVATE

Clasa V-a. Exerc. 717. Se dă triunghiul ADB dreptunghi în D . Fie E piciorul bisectoarei BAD , M proiecția lui D pe AE , F simetricul lui A față de M și C intersecția lui BF cu AD . Să se arate că CE trece prin mijlocul lui AB .

GH. B.

Notăm cu N și P intersecția lui AB cu DM și cu CE . Punctul M fiind prin construcție mijlocul lui AF și lui DN figura $DANF$ este un paralelogram. Deci NF este paralelă cu AC și avem

$$(1) \quad \frac{DA}{DC} = \frac{FC}{FB}.$$

Aplicăm teorema lui CEVA triunghiului CAB și cevienelor AF , BD , CP . găsim

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{FC}{FB} = -1.$$

De unde ținând seamă de (1)

$$PB = -PA$$

care arată că P este mijlocul lui AB .

V. 723. Fie N un punct pe cercul de diametru AB și M intersecția lui AN cu tangenta în B la cerc. Dreapta care unește pe N cu mijlocul lui BM este tangentă la cerc.

GH. B.

Unghiul BNM este drept pentru că și adiacentul său ANB este drept ca fiind înscris într'un semicerc. În triunghiul dreptunghic BNM median NP este egală cu PB și cu PM. Cum PB este tangentă la cercul de diametru AB și egală sa PN va fi tangentă la același cerc.

V. 726¹⁾. Fie α și β centrele patratelor construite în exterior pe laturile AC, BC ale unui triunghi ABC. Să se arate că, dacă A și B sunt fixe, atunci centrul patratului, construit pe $\alpha\beta$ spre interiorul triunghiului ABC, este fix ori care ar fi poziția punctului C în plan.

GH. B.

Fie γ , δ celelalte vârfuri ale patratului $\alpha\beta\gamma\delta$ construit ca în enunț, γ fiind diagonal opus lui β . Unghiurile $A\alpha\gamma$ și $C\alpha\beta$ sunt egale pentru că sunt respectiv diferențele între unghiurile drepte $\gamma\alpha\beta$, $C\alpha A$ și unghiul $A\alpha\beta$. Apoi

$$\overline{A\alpha} = \overline{C\alpha} \quad , \quad \overline{\alpha\gamma} = \overline{\alpha\beta}$$

prin construcție. Deci triunghiurile $A\alpha\gamma$, $C\alpha\beta$ sunt egale, de unde rezultă

$$(1) \quad \overline{A\gamma} = \overline{B\beta} \quad \text{și} \quad \sphericalangle A\gamma\alpha = \sphericalangle B\beta\delta.$$

Pe figură se observă că

$$\sphericalangle \beta\gamma A = 45^\circ - \sphericalangle A\gamma\alpha$$

$$\sphericalangle \gamma\beta B = 45^\circ - \sphericalangle B\beta\delta.$$

De unde ținând seamă de (1)

$$\sphericalangle \beta\gamma A = \sphericalangle \gamma\beta B$$

deci $A\gamma B\beta$ este un paralelogram. Diagonalele lor se taie la mijlocul lui AB. Dar mijlocul lui $\beta\gamma$ este tocmai centrul patratului $\alpha\beta\gamma\delta$, care confundându-se cu mijlocul lui AB este fix când A și B sunt fixe.

1) La pag. 73 i s'a dat greșit numărul 721. A se vedea erata dela pag. 97.

V. 679. Se dau cercurile O_1 și O_2 . Să se construiască un alt cerc O_3 care să treacă prin centrele primelor două și astfel încât dacă A_1B_1 și A_2B_2 sunt dreptele care poartă coardele comune ale lui O_3 cu cercurile O_1 și O_2 , dreptele A_1B_1 și A_2B_2 să se taie după un unghi dat α .

Să se afle apoi locul punctului M de intersecție al dreptei A_1B_1 cu A_2B_2 când α variază.

V. GH.

O_3 se află pe perpendiculara ridicată pe mijlocul lui O_1O_2 . Se mai află O_3 la intersecția perpendicularelor coborâte din O_1 , O_2 respectiv pe A_1B_1 , A_2B_2 . Fie M_1 , M_2 , mijloacele coardelor A_1B_1 , A_2B_2 . Observând că patrulaterul $MM_1O_3M_2$ este inscribibil, deducem că $\angle O_2O_1O_3 = \frac{\alpha}{2}$, de unde construcția propusă. Două soluții.

Dreptele A_1B_1 , A_2B_2 sunt respectiv axele radicale ale cercurilor (O_1, O_3) , (O_2, O_3) . Rezultă că locul lui M este axul radical al cercurilor O_1 , O_2 , fixe.

Exerciții generale. E. G. 387. Dacă numerele a și b sunt întregi și pozitive, iar $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i , în ce caz avem:

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} - [\varphi(b)]^{\varphi(a)} = M(a \cdot b)?$$

I. L.

Având un exercițiu cu indicatori, voi da mai întâi o definiție a lor.

Prin *indicatorul* unui număr oarecare întreg și pozitiv N , se înțelege numărul numerilor prime cu N și mai mici decât N .

Fie, spre exemplu, $N = a^\alpha$, a fiind un număr absolut (adică un număr care nu se împarte decât cu el și cu unitatea), atunci numerele *neprime* cu N (adică acelea cari au un divizor comun cu N) și mai mici decât N sunt:

$$a, 2a, 3a, \dots \left(\frac{N}{a}\right) \cdot a.$$

Adică sunt în total $\left(\frac{N}{a}\right)$ numere neprime. Atunci numerele prime cu N și mai mici decât N , vor fi:

$$\varphi(N) = N - \frac{N}{a} = N \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) = a^{\alpha-1} \cdot (a-1)$$

care reprezintă tocmai expresia indicatorului.

Fie acum, spre exemplu, $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$, atunci numerele *neprime* cu N vor fi:

$$a, 2a, 3a, \dots \left(\frac{N}{a}\right) \cdot a ; \text{ adică } \left(\frac{N}{a}\right) \text{ numere.}$$

$$b, 2b, 3b, \dots \left(\frac{N}{b}\right) \cdot b ; \text{ adică } \left(\frac{N}{b}\right) \text{ numere.}$$

În ambele șiruri avem însă perechi de numere identice cu: $ab, 2ab, 3ab, \dots \left(\frac{N}{ab}\right) \cdot ab$; adică $\left(\frac{N}{ab}\right)$ numere pe care trebuie să le scădem odată.

Cu aceasta numărul numerilor prime cu N și mai mici ca N este:

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= N - \frac{N}{a} - \frac{N}{b} + \frac{N}{ab} = N \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \\ &= a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} (a-1)(b-1). \end{aligned}$$

Prin urmare, în general vom avea:

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= N \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots \\ &= a^{\alpha-1} \cdot b^{\beta-1} \cdot c^{\gamma-1} \dots (a-1)(b-1)(c-1) \dots, \\ &= N - \sum \frac{N}{a} + \sum \frac{N}{ab} - \sum \frac{N}{abc} + \dots \end{aligned}$$

Revenind acum la exercițiul No. 387, avem pe rând:

1. Dacă a și b sunt numere prime absolut mai mari ca 1. atunci expresia devine:

$$E = (a-1)^{b-1} \rightarrow (b-1)^{a-1}.$$

Față de a , avem: $(a-1)^{b-1} = Ma + 1$, iar $(b-1)^{a-1} = Mb + 1$ (după teorema lui FERMAT).

Față de b avem: $(a-1)^{b-1} = Mb + 1$ (după teorema lui FERMAT), iar $(b-1)^{a-1} = Ma + 1$. Deci vom avea $E = M(a \cdot b)$.

2. Dacă $\varphi(a)$ și b deoparte și $\varphi(a)$ și a de altă parte sunt primi între ei, atunci după teorema lui EULER avem:

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} = Mb + 1 \quad \text{și} \quad [\varphi(b)]^{\varphi(a)} = Ma + 1.$$

Deci pentru ca să fie posibilă relația din enunț, ar trebui să mai avem respectiv:

$$[\varphi(b)]^{\varphi(a)} = Mb + 1 \quad \text{și} \quad [\varphi(a)]^{\varphi(b)} = Ma + 1.$$

Dar aceasta nu-i posibil decât dacă a și b sunt primi absoluți.

3. Dacă avem: $a = \alpha \cdot b^m$ unde m este mai mare ca 1, atunci relația din enunț este posibilă numai când:

$$[\varphi(b)]^{\varphi(a)} = Ma.$$

Deasemenea, dacă $b = \beta \cdot a^n$, unde $n > 1$, relația din enunț este posibilă numai dacă avem:

$$[\varphi(a)]^{\varphi(b)} = Mb.$$

4. Dacă admitem că a și b sunt numere mai mari ca 2, atunci expresia din enunț se mai poate scrie:

$$E = A \cdot B$$

unde:

$$A = [\varphi(a)]^{\frac{1}{2}\varphi(b)} - [\varphi(b)]^{\frac{1}{2}\varphi(a)}$$

$$B = [\varphi(a)]^{\frac{1}{2}\varphi(b)} + [\varphi(b)]^{\frac{1}{2}\varphi(a)}.$$

Iar relația din enunț va fi posibilă dacă avem:

$$\frac{A}{B} = \left\| \begin{array}{c|c} Ma & Mb \\ \hline Mb & Ma \end{array} \right\| \frac{M(a \cdot b) \text{ sau unu}}{M(a \cdot b)} \left| \begin{array}{c} k \cdot a' \cdot b' \\ \hline q \cdot a'' \cdot b'' \end{array} \right|$$

unde $a' \cdot b' \times a'' \cdot b'' = a \cdot b$, iar k și q sunt doi întregi oarecare.

5. Dacă $\frac{1}{2}\varphi(a)$ și $\frac{1}{2}\varphi(b)$ sunt pari, A poate fi descompus iar într'un produs de doi factori și asupra lui se poate face același raționament ca la 4.

I. L.

E. G. 398. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 = xyz$$

GH. B.

Din ecuația dată se scoate

$$x = \frac{yz \pm \sqrt{y^2 z^2 - 4y^2}}{2}$$

Pentru ca x să fie real și întreg trebuie ca mai întâi

$$z^2 - 4 = v^2$$

$$\therefore (z + v)(z - v) = 4$$

$z + v$ și $z - v$ fiind divizori de aceeași paritate a lui 4. Nu se poate lua decât

$$z + v = z - v = 2 \quad \therefore z = 2, v = 0.$$

Ecuația dată devine

$$(x - y)^2 = 0 \quad \therefore x = y.$$

Deci soluțiile problemei sunt valoarea unică 2 pentru z și o infinitate de valori egale între ele pentru x și y .

E. G. 400. Dacă se scrie primul număr din perioada a doua a lui ARHIMEDE, adică „octada de octade“, cifra zero, având 1,5 mm. lățime și intervalul dintre ele fiind 1 mm., ce lungime va avea numărul?

I. L.

După Culegerea de Probleme de Aritmetică de D-1 I. IONESCU, problema No. 10 (I), ne arată că „octada de octade“ este: $10^8 \times 10^8$ adică este 1 urmat de opt sute milioane nule.

Dacă înmulțim cu $1,5 + 1 = 2,5$ mm. găsim o lungime de 2000 Km.

I. L.

E. G. 401. Dacă unui număr de trei cifre îi intercalăm o altă cifră între cifrele lui, obținem două numere de patru cifre diferite.

Care dintre acele numere va fi mai mare?

I. L.

Fie abc numărul de trei cifre și x cifra intercalată, atunci avem:

$$axbc - abxc = 90 \cdot (x - b).$$

Deci dacă $x > b$, primul număr va fi mai mare.

I. L.

E. G. 402. Un număr are opt cifre mai mari ca 2 și mai mici ca 8. Ce modificare va suferi acel număr dacă îi vom spori cu 2 cifrele de rang pereche și îi vom micșora cu 2 celalalte patru cifre? Dar dacă sporim cu 2 primele patru cifre și micșorăm cu 2 ultimile patru?

Numerotarea cifrelor o facem în sensul scrierii, dela stânga la dreapta.

I. L.

Fie x cifra cu care sporim sau scădem cifrele unui număr de n cifre, așa fel încât cifrele să fie mai mari ca x sau mai mici ca $10 - x$. Atunci în general modificările vor fi:

$$F9 \cdot x \cdot [10^{n-2} + 10^{n-4} + \dots + 1].$$

I. L.

E. G. 403. Să se găsească expresiunea generală a numerelor cărora mutându-le cifra cu care începe la coadă, se obțin multipli ale acelor numere.

I. L.

Fie $N = 10^n \cdot a + A$ numărul, unde A este un număr de n cifre și a o cifră oarecare. Având:

$$10 \cdot A + a = m \cdot (10^n \cdot a + A)$$

găsim:

$$N = 10^n \cdot a + \frac{(10^n \cdot m - 1) \cdot a}{10 - m}$$

unde $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Pentru $m = 1$, N are cifre egale.

Pentru $a = 10 - m$, $N = 10^{n+1} - 1$, ceea ce intră în primul caz.

Pentru $a = K(10 - m)$ nu avem soluție.

Pentru cazul: $10^n \cdot m - 1 = \mathcal{M}(10 - m)$ avem condiția:

$$(10 - m + m)^n \cdot m - 1 = \mathcal{M}(10 - m)$$

$$\therefore m^{n+1} - 1 = \mathcal{M}(10 - m).$$

Valorile $m = 1$ și 9 sunt eliminale. De asemenea cazurile $m = 2, 4, 5, 6, 8$ nu dau soluții.

Rămâne deci $m = 3$ și 7 .

Pentru $m = 3$ avem $n = 6 \cdot p - 1$ deci:

$$N = \frac{10^{6 \cdot p} - 1}{7} \cdot a.$$

Pentru $m = 7$ avem: n oarecare.

E. G. 405. Dacă numărul N^N are n cifre, câte cifre ar putea avea N ?

I. L.

Avem:

$$10^n \leq N^N < 10^{n+1}.$$

Deci:

$$10^{\frac{n}{N}} \leq N < 10^{\frac{n+1}{N}}.$$

Așa dar numărul cifrelor lui N este cuprins între $\left(\frac{n}{N}\right)$ și $\left(\frac{n+1}{N}\right)$.

I. L.

Până la 1 Aprilie 1942 s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în numerele 4, 5, 6 dela*):

Liceul de fete „Carmen-Sylva“, București.

Clasa VI-a: DAMIAN C. LUCIA (VI: 723).

Liceul teoretic de fete, Brăila.

Clasa VIII-a: COLGIU I. SILVIA (E. G.: 436).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa VII-a: LUNGU C. MARIA (VII: 637).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa VI-a: ANTONESCU D. E. (E. G.: 436).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa VIII-a: MĂNESCU G. I. (VIII: 519).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asteric.

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI D. (III : 198, V : 725).

Clasa VII-a : GRIGORESCU N. (VII : 637), TĂNĂSESCU G. V. (VII : 637, 49, 50).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa V-a : POPESCU CR. N. (V : 725).

Clasa VII-a : CONSTANTINESCU M. (VII : 634).

Clasa VIII-a : ISOPESCU P. (E. G. : 436), SENI CL. (E. G. : 436).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa VI-a : HORBUNIEV P. V. (VI : 715, 6), MIȘICU V. M. (VI : 713).

Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VI-a : PRIȘCU R. A. (VI : 636), TIMOTIN A. A. (VI : 715, 6).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa IV-a : ARDARE N. N. (E. G. : 414), TIMIȘ A. D. (IV : 616, 21, 2).

Liceul „Regele Ferdinand I“, Bacău.

Clasa VI-a : FÂNARU N. D. (E. G. : 436).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a : BOCIORT F. I. (V : 730, 5, VII : 622, E. G. : 436).

Clasa VII-a : POPA T. T. (VII : 637, 49, 50, 4).

Liceul „Samuil Vulcan“, Beiuș.

Clasa V-a : GOLDIȘ T. GH. (V : 725, 31, E. G. : 436), LOGOFĂTU T. (V : 721, 5, 30, 1, E. G. : 436).

Liceul „Știrbey Vodă“, Călărași-Ialomița.

Clasa VII-a : CULEA I. D. (E. G. : 436), IONESCU C. V. (VII : 640, 9, E. G. : 436).

Liceul „D. B. Știrbey“, Câmpina.

Clasa IV-a : HORNET V. (IV : 623).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Cernăuți.

Clasa IV-a : MARINESCU C. S. (IV : 611, 21, 2, V : 730).

Clasa VI-a : CIMBRU M. (E. G. : 436), POPESCU A. N. (E. G. : 436).

Clasa VIII-a: ADAM N. (E. G.: 436), BĂRBULESCU ST. C. (E. G.: 436), BĂRBUȚ I. T. (E. G.: 436), DENCICOV E. (E. G.: 436), DIAGONESCU V. C. (E. G.: 436), GEORGESCU N. G. (E. G.: 436), GHEORGHE S. M. (E. G.: 436, 7), IVAN H. (E. G.: 436, 7), JIPA N. (E. G.: 436), POPESCU ST. GH. (E. G.: 437), TOPÂRCEANU GH. (E. G.: 436, 7), VASILESCU V. M. (E. G.: 436, 7), VIȘAN TR. (E. G.: 436), ZAVATI C. C. (E. G.: 436).

Liceul „Aron Pumnul“, Cernăuți.

Clasa VIII-a: DENCICOV E. (VIII: 527*, 8*, 9, 30).

Liceul Militar „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa IV-a: CROITORU I. V. (IV: 611), GOGA P. (IV: 611), MIHALACHE GH. C. (IV: 616), MOCANU P. (IV: 611), NEGULESCU GH. (IV: 611), OPRESCU C. V. (IV: 611), PARASCHIV S. (IV: 611), PETRE O. S. (IV: 611), POPA V. P. (IV: 611), POPOVICI C. H. (IV: 611), POPESCU D. I. (IV: 611), POPESCU N. (IV: 611), PREDESCU O. (IV: 611), RĂILEANU R. (IV: 611), STOICEIU CH. S. (IV: 611).

Clasa V-a: CRUCIANU T. A. (V: 725), DUMITRIU M. M. (V: 725), PETROVICI A. (V: 725), ROȘUȚ G. (V: 725).

Clasa VI-a: ANDRIESCU N. V. (VI: 714), GUDUMAC S. V. (VI: 714), PĂSLĂRAȘU C. (VI: 714).

Clasa VII-a: FLOREA V. D. V. (VII: 637).

Clasa VIII-a: FILIP GE. GH. (VIII: 519), MATEESCU A. (E. G.: 436, 7).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a: CUBAT H. A. (VII: 636, 7, 44*, 9, E. G.: 426), DONȚU GH. G. (VII: 644, 9), SPIRIDONEANU E. M. (VII: 637).

Clasa VIII-a: MANOLACHE C. M. (VIII: 527, E. G.: 426).

Liceul „Național“, Iași.

Clasa III-a: TIGRAN D. (E. G.: 426).

Liceul militar Iași.

Clasa III-a: CALCAN V. V. (III: 198), VLAD M. (III: 198).

Clasa IV-a: BĂRZESCU M. (IV: 611), CIOBANU D. D. (IV: 611), CIUMAȘU V. (IV: 611), FILIMON I. (IV: 611), IFRIM A. (IV: 611), NETEDU N. C. (IV: 611), RADU M. C. (IV: 611), VACHE D. D. (IV: 611).

Clasa V-a: BRIGHIU C. (V: 725), DAMIAN N. S. (V: 725), EDU E. (V: 725).

Clasa VI-a: ANDRONACHE I. (VI: 716), DRAGOMIR P. C. (VI: 716), PETRICAN M. (VI: 715, 6), VĂIDEANU G. (VI: 716).

Clasa VIII-a: BOGDAN GH. (VIII: 518, 9, 20, 1, 51), CIUHUREANU N. P. (VIII: 521, 2), CUPTOR I. P. (VIII: 521), DĂSCĂLESCU V. I. (VIII: 521, 2), DRĂGHICESCU P. P. (VIII: 520, 1, 2), DUMITRIU C. R. (VIII: 521, 72), ELIADE V. (VIII: 521, 2), FOTESCU N. ȘT. (VIII: 521, 2), IACOMI D. M. (VIII: 521, 2), IVAN C. Z. (VIII: 521, 2), MANOLIU GH. V. (VIII: 521, 2), NEDELEA FL. I. (VIII: 521, 2), OSLOBEANU I. M. (VIII: 521, 2), PARLOG I. I. (VIII: 521), POPA N. A. (VIII: 521, 2), RĂDULESCU I. (VIII: 521, 2), ROMANESCU C. (VIII: 519, 21, 2).

Colegiul Național Militar, Predeal.

Clasa V-a: COLUMBEANU D. R. (E. G.: 436), COSTEA N. ȘT. (V: 731, E. G.: 436), FRĂȚIANU A. L. (V: 731), GOLIANU D. (V: 725), IANA C. V. (V: 731, E. G.: 436), ILIESCU C. V. (V: 731), MARINESCU C. M. (E. G.: 436), PIȚIȘ N. (E. G.: 436), POJOGEANU I. M. (E. G.: 436), POPESCU I. A. (E. G.: 436).

Clasa VI-a: BĂDILESCU E. (E. G.: 436), BALABAN GH. S. (E. G.: 436), JURIST T. V. (VI: 727, E. G.: 436), PAROTĂ I. P. (E. G.: 436), PURICU I. I. (VII: 649).

Clasa VII-a: COLUMBEANU S. (E. G.: 436).

Liceul „Pr. Nicolae“, Sinaia.

Clasa IV-a: APOSTOIU D. (IV: 611, 4, 23), ARITON MARCEL (IV: 611, 4, 23), COMAN ELENA (IV: 611, 4, 23), CATIU A. A. (IV: 611, 3, 23), CONSTANȚINESCU M. (IV: 611, 4), JURATU N. (IV: 614, 23), MAXIM A. (IV: 611, 3), NIȚESCU A. (IV: 611, 4, 23), POPESCU D. E. (IV: 611, 4), SOPET L. (IV: 611, 4, 23), STANCU V. (IV: 611, 4, 23).

Liceul Militar, Timișoara.

Clasa V-a: OPREA N. (E. G.: 436), PAVICA A. V. (V: 731), PETRESCU GH. S. (V: 731), ȘTEFĂNESCU G. (V: 731), STRATI I. (V: 725).

Clasa VII-a: BOULESCU M. V. (E. G.: 436), DRAGOMIR M. M. (VII: 637, E. G.: 436), DUCA V. (VII: 637), GHIULEI G. (VII: 637), IANCU T. C. (E. G.: 436), MOGA L. N. (E. G.: 436), OPREA D. GH. (VII: 637, E. G.: 436), PÂNTEA T. (VII: 637; E. G.: 436), ȘOANCA N. (VII: 637).

Clasa VIII-a: BARANGA T. G. (E. G.: 436).

Liceul „Enăchiță Văcărescu“, Târgoviște.

Clasa VII-a: ALBOTEANU V. (VII: 644, 5).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa VII-a: VASILESCU N. N. (VII: 637).

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 August 1942

Clasa III-a. Exerc. 204. Intr'un triunghi oarecare ABC , bisectoarea unui unghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile adiacente (proprietate cunoscută).

2°. Ea determină pe o mediană neadiacentă un raport, care este dublul raportului determinat pe o latură opusă.

3°. Dacă I este punctul unde bisectoarea AA' taie bisectoarea BB' , avem:

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{AB + CB}{AC}.$$

O. N. Ț.

III. 205. Un pătrat $ABCD$ rotit în jurul centrului său O de un unghi de 45° , ia poziția $A'B'C'D'$. Fie E, F, G, H, I, J, K, L punctele de intersecție ale perechilor de drepte: $(AB, A'D')$, $(AB, A'B')$; $(BC, B'A')$; $(BC, B'C')$; $(CD, C'B')$; $(CD, C'D')$; $(DA, D'C')$; $(DA, D'A')$; fie încă $M, N, \dots$ intersecțiile $(OA, A'D')$, $(OA', AB) \dots$

Să se arate:

1°. Că poligonul $EFGHIJKL$ este un octogon regulat;

2°. Ce OE este bisectoarea unghiului AOA' ;

3°. Că $\overline{AE} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AN}}{\overline{OA} + \overline{ON}}.$

O. N. Ț.

III. 206. Fie A, B, C, D, E punctele care împart cercul (O) în cinci părți egale; A', B', C', D', E' respectiv intersecțiile perechilor de drepte (EB, AC) ; (AC, BD) ; (BD, CE) ; (CE, DA) ; (DA, EB) .

Să se arate:

1°. Că $A'B'C'D'E'$ este un pentagon regulat

2°. Că $\overline{AA'}^2 = \overline{A'E'} \cdot \overline{AB}$;

3°. Că $\frac{\overline{A'E'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}^2}{4\overline{OA}^2 - \overline{AB}^2}.$

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 628. Un con circular drept (S) înscris într-o sferă dată (O) este prelungit până întâlnește planul paralel cu baza lui și tangent sferei. Se formează astfel pe lângă conul dat un trunchiu de con (T) a cărui generatoare este cât $\frac{9}{16}$ din generatoarea conului (S).

Să se găsească *raportul ariilor laterale și raportul volumelor* celor două solide [conul (S) și trunchiul de con (T)].

2°. Se construiește apoi conul (S') circumscris sferei (O) și având drept bază, baza mare a trunchiului de con (T).

S' fiind vârful acestui con, iar S'ED o generatoare a lui cu punctul de contact E cu sfera, să se arate că SE este paralelă cu OD. Să se găsească: a) raportul ariei conului (S') către aria sferei (O); b) raportul volumelor acestor două solide.

O. N. Ț.

IV. 629. Un con circular drept (S) înscris într-o sferă (O) dată, taie planul tangent la sferă și paralel cu baza lui după un cerc (A) egal cu un cerc mare al sferei (O).

Să se calculeze măsurile exacte:

- a) Suprafața laterală și volumul conului (S);
- b) Suprafața laterală și volumul trunchiului de con (T), cuprins între conul (S) și planul tangent considerat;
- c) Aria calotei sferei (O), cuprinsă în trunchiul de con (T).

O. N. Ț.

IV. 630. Un trapez isoscel are înălțimea h și bazele necunoscute, însă se știe că: Dacă se prelungesc dela baza mică laturile neparalele cu $\frac{1}{5}$ din lungimea lor și se scurtează aceste laturi neparalele cu $\frac{1}{5}$ din lungimea lor, începând dela baza mare, se obține un nou trapez a cărui arie este $\frac{5}{7}$ din aria trapezului dat; din contra, dacă se prelungesc laturile neparalele, dela baza mare cu $\frac{1}{7}$ din lungimea lor și se scurtează aceste laturi neparalele,

începând dela baza mică, cu $\frac{1}{7}$ din lungimea lor, se obține un alt trapez a cărui arie este $\frac{8}{7}$ din aria trapezului dat.

1°. Să se găsească măsurile bazelor trapezului dat.

2°. Știind că înălțimea este medie proporțională între *semi-suma* și *semidiferența* bazelor, să se determine aria trapezului dat.

3°. Se rotește trapezul astfel determinat în jurul unei axe paralelă cu o diagonală și trecând prin un vârf al său.

Să se calculeze aria solidului înăscut.

O. N. Ț.

IV. 631. Fie ABCD un trapez isoscel circumscris unui cerc (O) de rază 1. Semidiferența bazelor AD și BC este cât $\frac{5}{6}$ din raza cercului (O). Se taie din trapez triunghiurile AOD și BOC, iar aria rămasă se rotește în jurul axei BC.

Să se găsească aria solidului astfel înăscut.

O. N. Ț.

Clasa V-a. Exerc. 740. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând în plan poziția vârfurilor B și C și punctul M de tangență al laturii AB sau AC cu unul din cercurile tritangente triunghiului de construit

GH. B.

V. 741. Să se construiască un triunghi a căruia i se cunoaște o latură, un unghi și se știe că o mediatoare trece prin piciorul unei bisectoare.

GH. B.

V. 742. Intr'un cerc de diametru $\overline{AB}$ se duce coarda $\overline{MN}$ și se notează cu P intersecția (AM, BN), P fiind exterior cercului. Fie P_1 proiecția lui P pe tangenta în M la cerc și P_2 proiecția pe tangenta în N.

Să se arate că

$$\overline{PP_1} - \overline{PP_2} = \frac{\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2}{\overline{AB}}.$$

G. D. S.

V. 743. Fie ABCDEF un exagon regulat cu centrul O și raza r . Rotind exagonul ABCDEF de un unghi de 30° în jurul centrului său, de exemplu în sensul direct, el ia poziția A'B'C'D'E'F'.

Insemnăm cu G, H; I, J; K, L; M, N; P, Q; R, S respectiv intersecțiile: (AB, A'F'); (AB, A'B'); (BC, A'B'); (BC, B'C'); (CD, B'C'); (CD, C'D'); (DE, C'D'); (DE, D'E'); (EF, D'E'); (EF, E'F'); (FA, E'F'); (FA, F'A').

Să se arate că poligonul GHIJKLMNPQRS este poligon regulat și că, dacă însemnăm cu l_{12} latura lui avem

$$l_{12} = (-3 + 2\sqrt{3})r.$$

Să se calculeze asemenea raza acestui poligon.

O. N. Ț.

V. 744. Fie A, B, C, D, E cinci puncte consecutive care împart cercul dat (O), de raza R, în cinci părți egale; fie asemenea L, M, N, P, Q respectiv intersecțiile (AC, BE), (AC, BD); (CE, BD); (CE, DA); (EB, DA). Să se arate că:

1^o. Poligonul LMNPQ este regulat;

2^o. Insemnând respectiv cu l , l_5 și R respectiv latura acestui poligon, latura pentagonului regulat convex și raza cercului (O), avem:

$$l = \frac{l_5 R^2}{4R^2 - l_5^2}.$$

O. N. Ț.

Clasa VI-a. Exerc. 734. Să se rezolve sistemul

$$\sin x = \frac{1}{\sin y}; \sin(2x + a) + \sin(2y - a) = \frac{1}{2}.$$

C. I. B.

VI. 735. Se consideră expresia

$$E \equiv a \sin x + b \cos x + c$$

să se determine a , b , c astfel ca expresia E să ia valorile $m - 2n$, m , $m + 2n$ pentru $x = \alpha - 2\beta$, $x = \alpha$, $x = \alpha + 2\beta$.

C. I. B.

VI. 736. Se consideră expresia

$$E \equiv \sin x + 2 \cos x + 3.$$

Să se determine x astfel ca $E = 2$.

C. I. B.

VI. 737. Un trapez isoscel, care are baza mare de 12, baza mică de 4 și înălțimea de 3, se rotește în jurul uneia din laturile sale egale.

Să se calculeze suprafața și volumul solidului astfel obținut.

C. I. B.

VI. 738. Două sfere de raze R și r sunt tangente în punctul A . Să se afle volumul și aria trunchiului de con format de tangentele comune și limitat la cercurile punctelor de tangență.

C. I. B.

VI. 739. Se dau patru sfere de rază R . Se așează trei sfere pe un plan orizontal, tangente două câte două, iar a patra sferă sprijinită pe cele trei.

Să se afle aria cercului ce trece prin cele trei puncte în care a patra sferă se sprijină pe celelalte.

C. I. B.

Clasa VII-a. Exerc. 772. Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{L(1+x) - \sin x}{1+x^2 - \cos x}.$$

G. D. S.

VII. 773. Se dau funcțiile: $u \equiv u(x, y)$ și $v \equiv v(x, y)$, apoi se definește y în funcție de x prin intermediul funcției implicite

$$F(u, v) = 0.$$

Să se găsească expresia lui y'_x (derivata lui y în raport cu x).

$$\text{Aplicație: } u = \sqrt{x^2 - y^2}; \quad v = \arcsin \frac{y}{x}.$$

G. D. S.

VII. 774. Se consideră funcția compusă $F(u, v, w)$ în care $u = f_1(x, y, z)$; $v = f_2(x, y, z)$; $w = f_3(x, y, z)$ sunt funcții omogene de grad respectiv m, n și p . Să se demonstreze că avem relația

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = muF'_u + nvF'_v + pwF'_w.$$

Cazuri particulare interesante.

G. D. S.

VII. 775. Se dau două drepte concurente D și Δ și un punct M pe D . Să se ducă prin M o dreaptă care să se sprijine pe Δ și să întâlnească linia de pământ, fără a folosi plane.

Aplicație: Dreapta D definită prin punctele $A(67, 9, 53)$ și $H(18, 33, 0)$. Dreapta Δ definită prin punctele $V(50, 0, 49)$ și $H_1(116, y, 0)$; $M(35, y, z)$. Cadrul epurei $^{130}/_{130}$, linia pământului fiind la mijloc. Construcțiile înafara cadrului nu sunt îngăduite.

G. D. S.

VII. 776. Se dau două drepte $D(d, d')$ și $\Delta(\delta, \delta')$.

Să se ducă o dreaptă paralelă cu Δ , care să se sprijine pe D și să întâlnească linia de pământ.

Nu se vor întrebuința plane ajutătoare.

G. D. S.

VII. 777. Un corp este alcătuit dintr'un trunchiu de con circular, drept, terminat prin jumătăți de sferă de aceleași diametre cu bazele respective. Generatoarele trunchiului de con fac unghiul de 30° cu planele bazelor. Știind că distanța între polurile celor două semisfere este a (constantă), să se studieze variația volumului acestui corp și să se găsească măsura înălțimii trunchiului de con pentru care volumul corpului este *maxim* sau *minim*.

G. D. S.

VII. 778. Să se execute epura proiecțiilor unui triunghi uoarecare ABC , cunoscând proiecția vârfului său A lungimile laturilor sale $\overline{AB} = d_1$ și $\overline{AC} = d_2$ și știind că latura BC este suprapusă liniei de pământ.

V. GH.

Clasa VIII-a. Exerc. 548. Fie $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$; F, F', O axa mare, axa mică, focarele și centrul unei elipse date (E) și M un punct pe elipsă. Fie P punctul de intersecție al perpendicularelor duse din punctele B și B' respectiv pe MF' și MF .

Să se găsească și să se construiască locul punctului P , construindu-se grafic axa mare, axa mică, focarele și directoarele corespunzătoare ale locului.

O. N. Ț.

VIII. 549. Fie A și A' vârfurile; F și F' focarele, O centrul; M și M' punctele unde tangenta în A taie asimptotele, B și B' proiecțiile lui M și M' pe axa netransversă; P punctul de intersecție al perpendicularelor duse din B și B' respectiv pe MF' și MF .

Să se găsească și să se construiască locul lui P , construindu-se grafic axele, focarele și directoarele corespunzătoare ale acestui loc.

O. N. Ț.

VIII. 550. Fie A și F vârful și focarul unei parabole date, având $\overline{AF} = 2p$; fie B și B' două puncte date pe tangenta la vârf a parabolei, simetrice în raport cu A , M un punct variabil pe parabolă. Fie P punctul de intersecție al perpendicularei duse din B pe MF cu paralela, la tangenta în M la parabolă, dusă prin B' .

Să se găsească locul punctului P și să se construiască acest loc.

O. N. Ț.

VIII. 551. Se dă o conică (E) și o coardă variabilă $\overline{M_1M_2}$ având direcția constantă. Fie M un punct pe coarda $\overline{M_1M_2}$ astfel

ca $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -k$.

Să se găsească locul punctului M .

Să se examineze cazul particular (limită) $k = 1$.

O. N. Ț.

VIII. 552. Intr'o sferă dată de rază 1 să se înscrie un trunchiu de con circular drept astfel ca suma razelor celor două baze să fie egală cu raza sferei, iar volumul acestui trunchiu de con să fie un sfert din volumul sferei.

O. N. Ț.

VIII. 553. Să se discute prin teorema lui ROLLE rădăcinile ecuației

$$2x^3 - 24x + a^2 + b^2 - 48 = 0$$

împărțind planul (Oa, Ob) în regiuni după natura rădăcinilor.

V. GH.

VIII. 554. Perpendicularele pe mijloacele laturilor AC și BC ale unui triunghi ABC întâlnesc latura AB în P și Q.

Să se arate că, dacă A, B sunt fixe, iar $\overline{PQ}$ o constantă, atunci vârful C descrie o conică cu centru.

Există o valoare a lui $\overline{PQ}$ pentru care locul lui C se reduce la un punct.

GH. B.

VIII. 555. Dintre toate conurile circulare drepte de aceeași înălțime să se găsească acela al cărui volum este de k ori volumul sferei înscrise.

O. N. Ț.

Exerciții Generale. Exerc. 454. Să se rezolve în numere întregi sistemul de ecuații

$$E\left(\frac{x}{3}\right) = E\left(\frac{y}{5}\right) ; E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{y}{3}\right) = 7,$$

unde $E(i)$ reprezintă întregii cuprinși în i .

I. L.

E. G. 455. Să se calculeze expresiile :

$$\sum_n^{n+p} E\left(\frac{i}{n}\right) \text{ și } \prod_n^{n+p} E\left(\frac{i}{n}\right),$$

unde $E(x)$ reprezintă întregii cuprinși în x .

I. L.

E. G. 456. Dacă avem:

$$\sqrt{n} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{2b + \frac{1}{b + \sqrt{n}}}},$$

atunci avem și

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(a + \frac{1}{b + \frac{1}{b}}\right) = n.$$

I. L.

E. G. 457. Un număr pseudo-simetric de scară p este un număr care are suma cifrelor, echidistante de cifrele externe, egale cu p sau cu zero.

Să se arate că numerele pseudo-simetrice de scară 9 sunt divizibile cu 9.

I. L.

E. G. 458. Să se determine numerele pseudo-simetrice de patru cifre și de scara 11, care sunt divizibile cu 11.

I. L.

E. G. 459. Să se arate că suma pătratelor a trei numere prime, mai mari ca 2, este de mai multe ori divizibilă cu 3.

I. L.

E. G. 460. Să se arate că, dacă unui număr pseudo-simetric de patru cifre îi schimbăm între ele două sau mai multe cifre alăturate, nu se poate obține un alt număr pseudo-simetric având altă scară.

I. L.

E. G. 461. Care sunt numerele de o cifră, x și y , care satisfac relația:

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y),$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n ?

I. L.

E. G. 462. Să se arate că, dacă p este un număr prim mai mare ca 3, avem:

$$\varphi(p!) > (p-1)!,$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n .

I. L.

INSTRUCTIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele :

III. N. Abramescu, *Lețiuni elementare de Algebră superioară*, pentru clasa VIII-a științifică. Editia VI-a Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și
G. Titelca, Vocabular Matematic Lei 20

X. G. Titeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
--	---------

XI. *Gazeta Matematică* 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) } pentru particulari Lei 200
 } pentru abonatii G. M. și S. G. M. Lei 150

XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 95

XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională Lei 190

XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu. Lei 125

XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I.	Lei 120
Ediția IV-a revăzută și mărită	Lei 120

	XVI. G. Țiteica, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I.	Lei 120
Ediția II-a, adăugită de N. G. Botea		Lei 140

XVII. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a.	224 118
Ediția IV-a, revăzută și mărită	Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui Euclid.* (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă
din limba greacă de V. Marian Lei 160

11. **Elementele lui Euclid.** (Cărțile VII – IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 250

III. **Elementele lui Euclid.** (Cărtile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPICLÉ și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**

Biblioteca Matematică „GEORGE TITEICA”

1. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* . . . Lei 135

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa :

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviței No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).

1941-42

GAZETA MATEMATICA

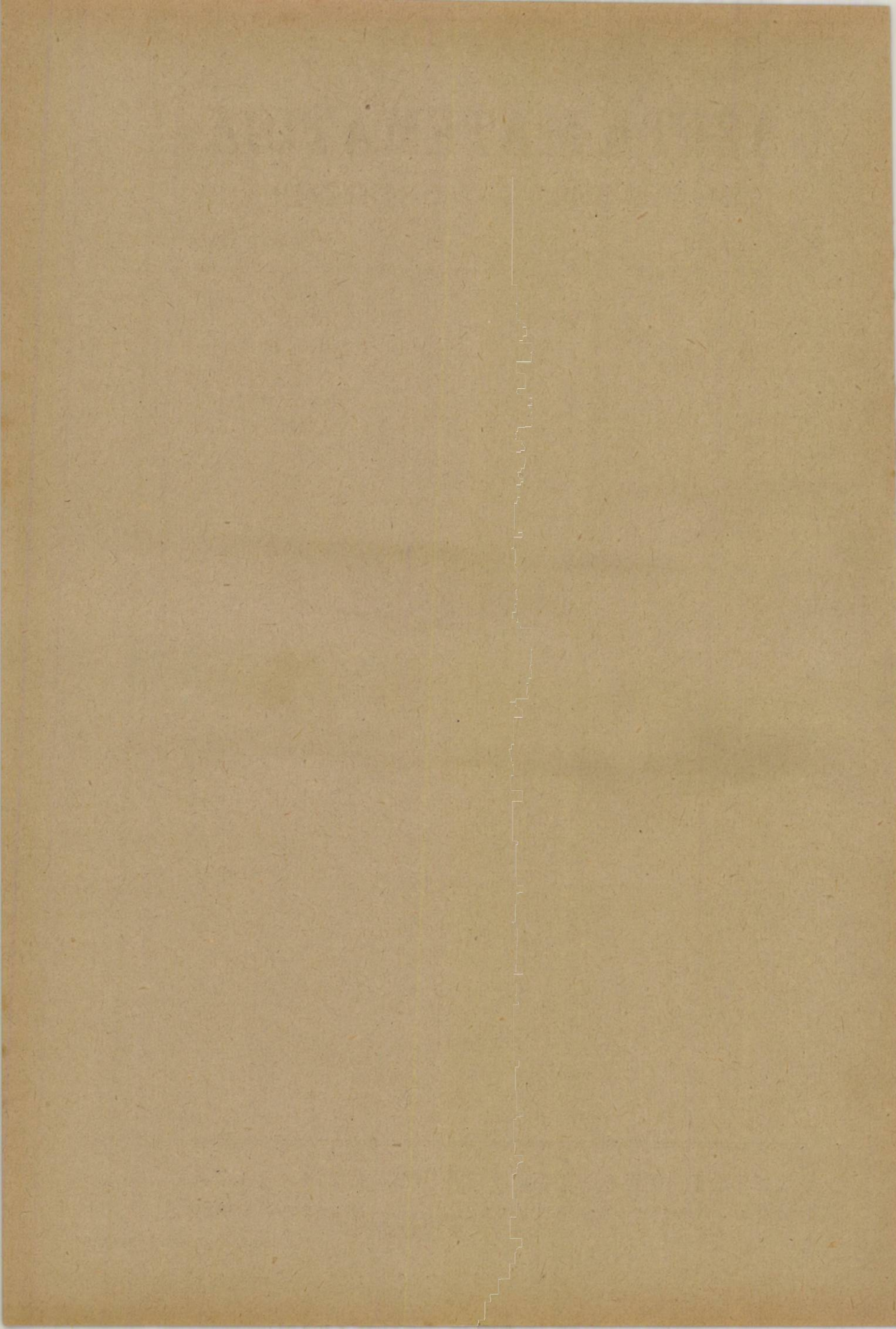
SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL VIII. No. 9

1 Iunie 1942



SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 3-9830



GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCII

ANUL VIII. No. 9

1 Iunie 1942

ABONAMENTUL LEI 80 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa:

Căpitan Ing. C. D. IONESCU-ȚIU

Casa „Gazeta Matematică”, Calea Griviței 158. — București 2

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE” DIN ANUL 1942

Concursul *Gazetei Matematice* face parte din tradițiile noastre, la care, o spunem fără niciun înconjur, ținem foarte mult. Poate că cineva citind aceste rânduri ne va reproșa că nu vrem să ne schimbăm, conducându-ne după metode învechite. Ce să schimbăm noi? Cei cari ne cunosc, știu bine că toate faptele noastre sunt bazate pe muncă continuă și dezinteresată. Aceasta este prima tradiție a vieții noastre dela *Gazeta Matematică*. Din ea decurge totul! N'avem deci nimic de schimbat! Din contră, cu ajutorul acestei tradiții înaintașii noștri au reușit, și noi ne vom strădui cu toate puterile noastre să menținem a face din *Gazeta Matematică* un ideal, o emblemă, o făclie! O făclie pe care toți o purtăm aprinsă și strălucitoare în sufletele noastre și căutăm mereu să o facem să se aprindă și în sufletele celor ce urmează după noi. În felul acesta *Gazeta Matematică* nu ne mai aparține nouă, ci neamului. Au trecut înaintașii noștri, vom trece și noi, dar *Gazeta Matematică* va rămâne.

A cincea zi de Paști au apărut pe sălile Șc. Politehnice din București placarde pe care era scris „Concursul *Gazetei Matematice*” și care indicau sala unde o mână de elevi, aranjați cu grijă de gospodarul nostru neobosit D-l GH. ILIESCU, așteptau să înceapă probele scrise. În ochii lor tineri se citea dragostea de muncă și de adevăr!

Incet, incet se adună unul câte unul profesorii, în frunte cu D-l ION IONESCU, ingineri, ofițeri, toți gustând din atmosfera concursului ca dintr'un tonic de forțe noi. Cele două teze decurg

liniștit în tot cursul zilei de Joi 9 Aprilie. A doua zi începe oralul, bine înțeles numai cu candidații cari au făcut lucrări scrise bune. Comisia caută, cu obiectivitatea caracteristică omului de știință, să așeze cea mai dreaptă rânduială în ordinea de clasificare a concurenților. Ceilalți membri prezenți pun și ei întrebări pentru a se convinge mai bine de valoarea candidaților. Dela început, concursul *Gazetei Matematice* cimentează printr'o încredere reciprocă, întemeiată pe o cinste exemplară, legătura dintre generațiile noi și cele vechi dela *Gazeta Matematică*.

Dar, conform tradiției fixată de mult regretatul GEORGE ȚIȚICA, în interiorul acestui raport trebuie să spunem părțile bune dar și cele neplăcute. Acestea sunt spuse în special pentru candidați, pentru a trage ei singuri concluziile care-i privesc. Din toți cei înscriși, au fost admiși la concurs 48 candidați. Numele lor se găsesc publicate într'un număr anterior al revistei. Dintre aceștia au absentat 5, s'au retras în timpul lucrărilor scrise 6; din cei rămași au fost admiși la oral 15 dintre cari s'a mai retras unul. Deci numai 14 candidați din 48 au fost admiși a trece toate probele concursului. Evident un număr cam mic! Dar ne miră faptul că printre ei au fost unii ce s'au retras dela oral sau dela scris. Cum să ne explicăm acest lucru? Nu și-au dat ei oare seama de seriozitatea problemelor ce se dau la concurs, sau concursul a fost numai un motiv spre a veni la București? Oricare ar fi cauzele, ele pun într'o lumină urită pe candidat. Sperăm ca în viitor să nu se mai întâmple asemenea lucruri! O a doua constatare neplăcută este că răspunsurile la aritmetică au fost foarte slabe, sub orice nivel! Evident că acest fapt se datorește programei analitice a liceelor care nu dă nicio atenție acestei părți importante a matematicilor, care dezvoltă în special raționamentul. Pentru a împlini golul din programele liceelor, măcar pentru unele elemente, *Gazeta Matematică* a hotărât ca de aci înainte toate concursurile să conțină probe de aritmetică.

Comisia examinatoare era formată din D-na OTILIA GEORGESCU ROEGEN, algebră la clasele IV și V și din D-nii I. IONESCU aritmetică clasa V-a, C-DOR I. LINTEȘ aritmetică clasa VI-a, P. BENEȘ algebră clasă VI-a, C. IONESCU-BUJOR algebră clasa VII-a, ADR. GHEORGHIU geometrie clasa IV-a și V-a, GH. D. SIMIONESCU geometrie și trigonometrie clasa VI-a, I. CHITULESCU geometrie

descriptivă clasa VII-a, ALEX. PANTAZI geometrie analitică clasa VIII-a, O. N. ȚINO geometrie analitică pentru Politehnică, TIB. POPOVICIU algebră și analiză pentru Politehnică și ALEX. STOENESCU mecanică pentru clasa VIII-a și Politehnică.

În afară de membrii comisiunii de examen, s'au mai interesat de aproape de mersul concursului luând parte la supravegherea tezelor și la examenul oral și următorii membri din societatea noastră: D-șoara GABRIELA ȚIȚEICA și D-nii: G-L GH. BUICLIU, GH. TH. GHEORGHIU, V. GORCIU, GH. ILIESCU, G-L GH. I. LITEANU, E. MEREUȚĂ, N. N. MIHĂILEANU, TR. POPP, A. A. ROȘU, D. STOICA, C. C. TEODORESCU, RADU ȚIȚEICA, ȘERBAN ȚIȚEICA, M. VASILIU și C-DOR GR. ZAPAN.

Rezultatul concursului este după cum urmează:

Premiul întâiu D-I DRĂGHICESCU P. PAUL elev clasa VIII-a dela lic. militar Gh. Makarovici din Iași. D-sa a dat răspunsuri foarte bune la toate probele scrise și orale dând dovada că stăpânește foarte bine materia clasei sale așezându-se cu cinste în lista primilor reușiți la concursurile *Gazetei Matematice*. I se dau ca premii: I. CHIȚULESCU, *Chaosul*; I. CHIȚULESCU, *Skiagrafometria*; GH. EM. FILIPESCU, *Statica construcțiunilor și rezistența materialelor*; I. IONESCU, *Génie civil*; I. IONESCU, *Isac Newton*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*; V. MARIAN, *Elementele lui Euclide*, 3 volume; B. NIEWENGLOWSKI. *Cours de géométrie analytique*, tome I, II, III, IV; WITTENBAUER & PÖSCHL. *Aufgaben aus der Technischen Mechanik*.

Premiul al doilea D-I POPA AUREL, clasa VIII-a, lic. militar Gh. Makarovici, Iași, pentru răspunsurile scrise bune și foarte bune la oral în special la geometria analitică. I se dau ca premii: M. ED. BRAHY, *Exercices methodiques de calcul différentiel*; I. CHIȚULESCU, *Chaosul*; I. CHIȚULESCU, *Skiagrafometria*; I. IONESCU, *Beton armat*; I. IONESCU, *Lucrările publice la Romani*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*; I. IONESCU, *Viața lui Euler*; TH. KLOMPERS, *Traité d'Arithmétique commerciale*; P. SMITH et W. LONGLEY, *Eléments de Mécanique rationnelle*.

S'au acordat apoi mențiuni candidaților cari urmează înscriși în ordinea claselor :

BĂRZESCU MIRCEA, clasa IV-a, lic. Gh. Makarovici, Iași, pentru teză foarte bună la algebră și răspunsuri orale bune. I se acordă

cărțile: *Gazeta Matematică*, volum jubilar; I. IONESCU, *Comparațiunea rădăcinelor ecuațiilor de gradul II*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*.

IEȘAN ST. ALEXANDRU, clasa V-a, lic. Matei Basarab, București, pentru teză foarte bună și răspunsuri bune la oral la algebră. I se acordă cărțile: *Gazeta Matematică*, volum jubilar; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*; I. IONESCU, *Un nou metod pentru studiul trigonometriei*.

CONSTANTINESCU I. EMIL, clasa VII-a, lic. Gh. Șincai, București, pentru teză și răspunsuri orale foarte bune la geometria descriptivă și oral de algebră. I se acordă cărțile: I. CHIȚULESCU, *Chaosul*; I. CHIȚULESCU, *Skiagrofometria*; I. IONESCU, *Geometrografia*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*.

POPA TEODOR, clasa VII-a, lic. Moise Nicoară, Arad, pentru teză și răspunsuri orale foarte bune la geometria descriptivă. I se acordă cărțile: I. CHIȚULESCU, *Chaosul*; I. CHIȚULESCU, *Skiagrafometria*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*; I. IONESCU, *Nomografia*.

BOGDAN GR. GHEORGHE, clasa VIII-a, lic. militar Gh. Markarovici, Iași, pentru răspunsuri bune la oral la mecanică și geometrie analitică. I se acordă cărțile: A. ANGELESCU, *Lecțiuni de calcul diferențial*; I. IONESCU, *Beton armat*; I. IONESCU, *Istoria învățământului ingineriei*.

DIACONESCU V. CONSTANTIN, clasa VIII-a, lic. militar Ștefan cel Mare, Cernăuți, pentru ambele lucrări bune la mecanică. I se acordă cărțile: A. ANGELESCU, *Lecțiuni de calcul diferențial*; I. IONESCU, *Beton armat*; I. IONESCU, *Gh. Em. Filipescu*.

FLOREȘTEANU ALEXANDRU, clasa VIII-a, lic. militar N. Filipescu, Predeal, pentru lucrări bune la mecanică. I se acordă cărțile: *Gazeta Matematică*, volum jubilar; I. IONESCU, *Andrée-Marie-Ampère*; I. IONESCU, *Maxime și minime geometrice*.

MĂNESCU GH. ION, clasa VIII-a, lic. Aurel Vlaicu, București, pentru teză foarte bună de mecanică și oral bun de geometrie analitică. I se acordă cărțile: A. ANGELESCU, *Lecțiuni de calcul diferențial*; I. IONESCU, *Beton armat*; I. IONESCU, *Reforma calendarului*.

În afară de aceste premii și mențiuni, acordate de societatea *Gazeta Matematică*, D-l Ing. D. STOICA, colegul nostru din societate, a anunțat la masa comună care a avut loc la restaurantul Luzana în seara de 11 Aprilie, că oferă tuturor candidaților prezenți la masă câte o carte, după dorința exprimată de fiecare. Dăm în cele ce urmează numele candidaților, în ordinea alfabetică, arătând în dreptul numelui cartea ce și-a dorit și pe care i-a oferit-o D-l Ing. D. STOICA :

BĂRZESCU M.: A. G. Ioachimescu. *Culegere de probleme de algebră*. Partea I și II.

BOGDAN GR. GH.: G. Țițeica. *Culegere de probleme de geometrie analitică*.

CONSTANTINESCU EM.: G. Țițeica. *Culegere de probleme de geometrie analitică*.

DRĂGHICESCU P. P.: F. G. M. *Exercices de géométrie*.

FLOREȘTEANU A.: Al. Stoenescu. *Culegere de probleme de mecanică. Statica*.

GHÎȚĂ. V.: I. Ionescu. *Culegere de probleme de aritmetică*.

IEȘAN AL.: A. G. Ioachimescu. *Culegere de probleme de algebră*. Partea I și II.

MUSCELEANU I.: Fitz-Patrick. *Arithmétique*.

PAVICA V.: A. G. Ioachimescu. *Culegere de probleme de algebră*. Partea I și II.

POPA N. A.: F. G. M. *Exercices de géométrie*.

POPA T.: Al. Stoenescu. *Culegere de probleme de mecanică. Statica*.

Înainte de a încheia ținem să mulțumim Politehnicei din București pentru acordarea sălilor de examen, Direcției liceelor militare pentru găzduirea și întreținerea elevilor în timpul concursului și D-lui D. STOICA, care prin inițiativa ce a luat, a făcut ca concurenții reușiți la oral să obțină câte o carte, spre a le rămâne mai vie amintirea concursului la care au luat parte.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE

GH. TH. GHEORGHIU.

REZULTATUL CONCURSULUI DE MECANICĂ

Concursul de Mecanică al *Suplimentului Gazetei Matematice* ținut în lunile Februarie, Martie și Aprilie, a dat un rezultat foarte îmbucurător. La acest Concurs, în afara rezolvitorilor obișnuiți ai problemelor de Mecanică din *Gazeta Matematică*, au mai trimis foarte bune soluții elevi din ținuturile române realipite și elevi din clasa VI-a în care nu se predă încă Mecanica.

Acest interes pentru Mecanică s'a evidențiat prin numărul mare de concurenți și prin soluțiile bine studiate chiar a acelor care, netrimțând un număr suficient de probleme rezolvate, nu au fost menționați la clasificare.

Rezultatul concursului este următorul:

În fruntea clasificării se așează D-I PAUL P. DRĂGHICESCU clasa VIII-a liceul militar Iași, vechiu corespondent al *Gazetei Matematice*, care prin modul de prezentare al soluțiilor tuturor problemelor și prin generalizarea unora dintre ele obține *premiul I de 2000 lei* precum și volumele: AL. STOENESCU. Teoria relativității, AL. STOENESCU. Probleme de Dinamică.

Premiul II în valoare de 1000 lei împreună cu volumele: AL. STOENESCU. Unități de măsură, AL. STOENESCU. Teoria relativității, se acordă D-lui DIACON P. ALEXANDRU clasa VIII-a B liceul Aron Pumnul, Cernăuți, pentru modul clar și precis de rezolvire al problemelor propuse.

În afara premiilor menționate în Regulamentul Concursului, pentru buna rezolvare a problemelor trimise și interesul arătat Mecanicei, se acordă următoarele mențiuni în ordinea clasificării:

1. ALDEA VIRGIL clasa VIII-a Colegiul Național Predeal; AL. STOENESCU: Unități de măsură.

2. MARINESCU VIOREL clasa VIII-a Liceul Titu Maiorescu; AL. STOENESCU: Teoria relativității.

3. UDREA CARP ILIE clasa VI-a Liceul D. A. Sturza, Craiova; AL. STOENESCU: Probleme de Dinamică.

4. MĂNESCU GH. IOAN clasa VIII-a Liceul Aurel Vlaicu, București; AL. STOENESCU: Unități de măsură.

5. POPA AUREL clasa VIII-a Liceul Militar, Iași; AL. STOENESCU: Unități de măsură.

6. VASILIU A. B. clasa VIII-a Liceul Al. Russo, Chişinău; AL. STOENESCU: Probleme de Dinamică.

7. ANASTASESCU ALEXANDRU clasa VIII-a Colegiul Naţional, Predeal; AL. STOENESCU: Teoria relativităţii.

8. MATEESCU AUREL clasa VIII-a B Liceul Militar, Craiova; AL. STOENESCU: Unităţi de măsură.

9. VASILIU GH. D. clasa VI-a Liceul Militar, Iaşi; AL. STOENESCU: Unităţi de măsură.

10. BOGDAN GH. clasa VIII-a Liceul Militar, Iaşi; AL. STOENESCU: Probleme de Dinamică.

11. MUSCELEANU ION VINCIUS clasa VIII-a Liceul Militar, Craiova; AL. STOENESCU: Teoria relativităţii.

DELEGAŢI PENTRU RAPORTE
GABRIELA ȚÎTEICA, AL. STOENESCU.

Până la 1 Mai 1942 s'au primit soluții bune la exercițiile publicate în numerele 5, 6, 7 dela *):

Liceul de fete „Carmen-Sylva“, București.

Clasa VI-a : DAMIAN C. LUCIA (VI: 736, E. G. : 453), STOICESCU VIORICA (E. G. : 432, 40, 52, 3).

Institutul de fete „Sf. Maria“, București.

Clasa VI-a : MUNTEANU MARIA (E. G. : 418).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa VII-a : MIHĂILESCU S. F. (VII: 637).

Liceul de fete „Oltea Doamna“, Iași.

Clasa VIII-a : DIMITRIU ȘOLMU MATILDA (VIII: 544, 5).

Gimnaziul de fete „Iulia Hasdeu“, Hotin.

Clasa IV-a : DUBCEAC L. (E. G. : 425), GARIUC V. (E. G. : 425), MANCIU T. (E. G. : 425), VERJAC S. (E. G. : 419, 20, 2, 5), VOIȚAHOVSCI I. (E. G. : 425), VOLOȘEȚCHI (E. G. : 425), ZABOLOTNEI N. (E. G. : 425).

*) Numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat este urmat de un asteric.

Liceul de fete Sighișoara.

Clasa V-a : APOSTOLESCU F. (V : 725).

„Liceul „Gh. Lazăr“, București.

Clasa VI-a : TIMOTIN A. (VI : 714, E. G. : 420, 4).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

Clasa III-a : DUMITRESCU S. (III : 192, IV : 611, E. G. : 424).

Clasa V-a : DUMITRESCU N. I. (E. G. : 424, 36), DUMITRESCU F. S. (V : 725).

Clasa VI-a : DUMITRESCU F. D. (VI : 714), HURBUNIEV V. (E. G. : 418, 9).

Clasa VII-a : STOICA V. V. (VII : 620).

Liceul „Matei Basarab“, București.

Clasa V-a : IEȘANU A. (V : 730, E. G. : 418, 24).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

Clasa V-a : ȘUȚESCU P. P. (E. G. : 423, 4).

Clasa VI-a : IONESCU G. I. (E. G. : 414, 20).

Liceul „Gh. Șincai“, București.

Clasa V-a : CRISTESCU G. A. (V : 725, E. G. : 418, 23, 4, 5), DUMITRESCU C. C. (V : 725), POPESCU N. (V : 725), PREDESCU M. M. (V : 725, E. G. : 423, 4).

Clasa VII-a : CONSTANTINESCU I. M. (E. 421, 4*, 5*, 26*, 7, 9, 32, 3), NICULESCU P. (VII : 765, 7).

Clasa VIII-a : IOSIPESCU C. I. (E. G. : 428, 30, 3, 41, 3).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa III-a : SENI D. (III : 199, 200, 1, E. G. : 453).

Clasa V-a : IORGU G. R. (V : 72, 5).

Clasa VII-a : TĂNĂSESCU V. (E. G. : 420, 1, 42).

Clasa VIII-a : SENI C. (VIII : 538, 41, E. G. : 443).

Liceul „Marele Voevod Mihai“, București.

Clasa VII-a : BRATU I. E. (VII : 649, 54, 65, 9, 70, E. G. : 436).

Liceul „Spiru Haret“, București.

Clasa IV-a : TIMIȘ A. D. (IV : 626, E. G. : 453).

Liceul „Moise Nicoară“, Arad.

Clasa V-a : BOCIERT F. I. (E. G. : 404, 6, 7, 20).

Clasa VII-a : ARĂDEANU T. T. (VII : 637, 54).

Liceul „Regele Ferdinand I“, Bacău.

Clasa VI-a : FĂNARU N. D. (E. G. : 418, 39, 41, 2).

Liceul „Samuil Vulcan“, Beiuș.

Clasa V-a : GOLDIȘ G. (E. G. : 443), LOGOFĂTU M. T. (V : 737, 8, E. G. : 418, 40), SASU I. I. (V : 725, 31, 7, E. G. : 427, 9, 33, 6*, 40, 2, 3).

Liceul „N. Bălcescu“, Brăila.

Clasa V-a : BOERESCU N. C. (V : 731, 3, 7, 8, E. G. : 436, 7, 53).

Liceul „Andrei Șaguna“, Brașov.

Clasa IV-a : BADEA A. D. (IV : 611).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă“, Brașov.

Clasa VII-a : FLORICA STELIAN (VII : 649, 50, 1, E. G. : 453),

Clasa VIII-a : FLORESCU V. G. (VIII : 534*, 8, 9).

Liceul „D. B. Știrbey“, Câmpina.

Clasa IV-a : HONET V. L. (IV : 626).

Liceul particular Caracal

Clasa IV-a : LANGU S. D. (E. G. : 436).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa VIII-a : MUSCELEANU D. (E. G. : 418).

Liceul „Știrbei-Vodă“, Călărași.

Clasa VII-a : CULEA I. D. (E. G. : 424), IONESCU C. V. (VII : 637, 769, 70).

Liceul „Aron Pumnul“, Cernăuți.

Clasa VIII-a : DENCICOV E. (E. G. : 427, 34, 9, 41), DIACONU A. (VIII : 527, 8, 9, 30, E. G. : 427*, 8*, 9*, 30*, 1*, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 40*, 1*, 2*, 4).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare“, Cernăuți.

Clasa V-a : DAMIAN C. (V : 725), GUTEȘ P. (V : 725).

Clasa VI-a : CIMBRU M. (E. G. : 42, 3), POPESCU N. (E. G. : 423), STAICU (E. G. : 418, 20, 3, 4, 43), TĂNASE T. G. (VI : 714, 5), TIPEIU D. D. (VI : 713, E. G. : 436).

Clasa VIII-a : DIACONESCU C. C. (E. G. : 423), IVAN H. (E. G. : 423, 4).

Liceul Alecu Russo Chișinău

Clasa VII-a : VASILIU B. A. (VII : 641, 4, E. G. : 427*, 33, 4, 6, 42, 53).

Colegiul Național „Carol I”, Craiova.

Clasa III-a: NICOLAE GEORGE (III : 198, 200, 1, E. G. : 427, 40, 1, 3, 53).

Liceul Militar „D. A. Sturdza”, Craiova.

Clasa IV-a: ALEXANDRU D. (IV : 616), ANDREI N. I. (IV : 616), STANCIU I. M. (IV : 616), STANCIU V. (E. G. : 429).

Clasa V-a: CÂRSTEA D. M. (V : 731, E. G. : 418, 20, 5, 8, 9, 41), NICOLICIOIU D. (E. G. : 433), POPA A. N. (V : 725, E. G. 433), RUSU T. N. (E. G. : 427, 33), ULMET V. V. (V : 725, E. G. : 427, 33, 4, 6).

Clasa VII-a: ANTONIU I. I. (VII : 649, 52, 3).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I”, Craiova.

Clasa VII-a: FLOREA D. V. (E. G. : 424), MAREȘ C. (E. G. : 420, 3), FILIP G. G. (E. G. : 424).

Liceul militar Iași.

Clasa III-a: IACOBĂȚ G. N. (E. G. : 424), VLAD M. (III : 201).

Clasa IV-a: BĂRZESCU M. (E. G. : 424, 39, 41), CIOBANU D. (E. G. : 424), CIORTOLOMAN S. (E. G. : 424), CIUMAȘU V. (E. G. : 424, 36), IFRIM A. (IV : 622, E. G. : 424), NACHE D. D. (E. G. : 418, 20, 4), RADU M. C. (E. G. : 424), STAN C. (E. G. : 424), ȘTEFĂNESCU A. (E. G. : 420).

Clasa V-a: BEJAN G. (V : 437), BRIGHIU C. (V : 437, E. G. : 436, 9), COȘNIȚĂ F. (V : 437), EDU E. (E. G. : 436, 9, 41), IGNAT M. (V : 437), MIHĂILESCU C. (V : 437), ROȘU N. (E. G. : 439, 41), VINTILĂ C. (V : 437).

Clasa VI-a: ANDREESCU M. (VI : 714, 5, 6, E. G. : 419, 20, 1, 4), ANDREI A. (VI : 714, 5, 6, E. G. : 419, 20, 1, 4), ARDELEANU G. (VI : 714, 6), ANDARACHI I. (VI : 714, E. G. : 425), BOSINCEANU C. (VI : 714, 5, 6, E. G. : 419, 20, 1, 4), GANEA N. (VI : 714), PETRICAR I. M. (VI : 714, 6, E. G. : 418, 20, 1, 4), POPA N. N. (VI : 714, 5, E. G. : 424), TURCULEȚ T. (VI : 714, 5, 6, E. G. : 419, 20, 1, 4), VASILIU D. (E. G. : 419, 20, 1, 4), ZAHARIA M. (E. G. : 418).

Liceul de Aplicație, Iași.

Clasa VII-a: CUBAT H. A. (VII : 644*, 9*, 50*, 3*, 4*, 69, 70, E. G. : 421, 3, 6, 36, 9, 41, 53), DONȚU G. (VII : 651, 5, 7, 7, 9, 60, E. G. : 432, 41, 3).

Colegiul Național Militar, Predeal.

Clasa VIII-a: CONSTANTINESCU V. (III : 199, E. G. : 424), CONSTANTINESCU V. (E. G. : 424), GHIȚĂ B. (E. G. : 424), DOBRICA I. (E. G. : 423, 4), PUCHIU I. (E. G. : 424), VLĂDESCU N. (E. G. 423, 4).

Clasa V-a: COLUMBEANU D. P. (V : 737, E. G. : 427, 33, 9, 40, 1, 3), DEMETRESCU O. C. (E. G. : 433), FRĂȚIANU A. L. (V : 737, 8, E. G. : 427), GHIȚĂ M. V. (E. G. : 427, 33, 9, 40, 1), GRIGORESCU I. M. (E. G. : 433), ION C. V. (E. G. : 427, 33), MARINESCU C. M. (V : 737, 8, E. G. : 427, 33, 9, 41, 3),

MĂNDESCU M. (V : 731), PITIȘ L. N. (V : 737, 8), POP T. M. (V : 731), POJOGEANU M. (E. G. : 433, 9, 41, 3), TONESCU V. N. (E. G. : 443), VELICAN A. (V : 738), VÂRTEJANU M. (V : 706, E. G. : 433, 6).

Clasa VI-a : BALABAN S. (E. G. : 440*), BĂDULESCU E. (E. G. : 440), JURIST V. (VII : 765, 9, E. G. : 439, 40, 53), PACOTĂ P. (E. G. : 439).

Clasa VII-a : ANASTASESCU A. (E. G. : 424), COLUMBEANU S. (E. G. : 427), GHEORGHIU M. (VII : 651, 2, 4), POPESCU D. (VII : 769), STOIANOVICI I. S. (VII : 769, 70, VIII : 540, E. G. : 453), ȚINCULESCU C. N. (VII : 769).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploești.

Clasa IV-a : CONSTANTINESCU D. (IV : 616).

Clasa VII-a : CĂTUNEANU T. (VII : 649).

Liceul „Enăchiță Văcărescu“, Târgoviște.

Clasa VII-a : ALBOTEANU V. (VII : 642), SĂFTOIU E. (VII : 635).

Liceul „Pr. Nicolae“, Sinaia.

Clasa III-a : ENACHE A. (III : 192).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa VI-a : GĂȚĂ G. G. (VI : 720, E. G. : 433, 6, 41), GIURCOIU M. (E. G. : 420, 7, 33, 4).

Liceul „C. Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa V-a : TINCU C. C. (E. G. : 427).

Liceul Militar „Mihai Viteazu“, Timișoara.

Clasa IV-a : COCHELA L. (E. G. : 424), IORDĂNESCU V. (E. G. : 424), VRÂNCEANU G. (E. G. : 418).

Clasa V-a : DUMITRESCU I. (E. G. : 420), SECICEANU C. (E. G. : 420).

Clasa VI-a : ENĂCHESCU G. I. (VI : 714).

Clasa VII-a : OPREA D. G. (E. G. : 424), PÂNTEA T. (E. G. : 418, 24).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa VII-a : VASILESCU N. V. (VIII : 638).

Liceul „Traian“, Turnu-Severin.

Clasa VI-a : DUMITRESCU T. (VI : 720, E. G. : 436).

Clasa VII-a : GIONEA C. (VII : 642, 9, 50).

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septembrie 1942

Clasa III-a. Exerc. 207. Dându-se două segmente $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ ($\overline{AB} < \overline{CD}$) și știind că primul este egal cu diferența apotemelor exagonului regulat și pătratului înscrise într'un cerc, iar al doilea segment egal cu suma acestor apoteme, să se construiască cercul.

V. GH.

III. 208. Pe raza $\overline{OA}$ a cercului (O), luată ca diametru, construim cercul (I), iar pe tangenta în A la cercul (I) măsurăm segmentul $\overline{AP}$, egal cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O). Raza $\overline{OP}$ taie cercul (I) în punctul N, iar cercul (O) în punctul M.

Să se arate că

$$\overline{MP} = 2 \overline{MN}.$$

O. N. Ț.

III. 209. Fie cercul (O) și $\overline{AB}$ un diametru al său. Pe raza $\overline{OA}$, ca diametru, construim cercul (I). Cercul cu centrul în A și raza $\overline{AI}$ taie cercul (O) în punctul E. Pe tangenta în A la cercul (I) măsurăm segmentul $\overline{AP}$ egal cu coarda $\overline{BE}$ a cercului (O). Semidreapta IP taie cercul (I) în punctul N, iar cercul (O) în punctul M.

Să se arate, că segmentul $\overline{MN}$ cuprins între cele două cercuri este egal cu jumătatea razei cercului (I).

O. N. Ț.

Clasa IV-a. Exerc. 632. Desfășurându-se ariile laterale a două conuri circulare drepte VAB și V'A'B' se găsește că sectoarele circulare rezultate au unghiurile la centru egale. Să se demonstreze, că în acest caz și unghiurile la vârf ale conurilor sunt egale.

V. GH.

IV. 633. Intr'o sferă de R este înscris un con circular drept (S), care are raza r a cercului de bază dată de expresia:

$$r = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} R, \quad (1)$$

unde p și q sunt două numere întregi de forma

$$(2) \quad p = 2m^2 - 2n^2 + 4mn + 4m + 1; \quad q = 2m^2 - 2n^2 - 4mn - 4n - 1.$$

Să se calculeze *aria laterală* și *volumul* conului S și să se arate că raportul lor respectiv către aria și volumul sferei este comensurabil.

Caz particular: $m = 5, n = 1$.

O. N. Ț.

IV. 634. Intr'o sferă (O) de rază R este înscris un trunchiu de con circular drept (T). Distanțele cercurilor de bază la centrul sferei sunt date de:

$$d_1 = \frac{2pq}{p^2 + q^2} R \quad \text{și} \quad d_2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} R \quad (p > q).$$

Să se calculeze *aria laterală* și *volumul* trunchiului de con (T).

O. N. Ț.

IV. 635. Se dă o sferă (I) de rază r înscrisă într'un con circular drept (S) de înălțime h . Știind că: $h = 2m^2$ și $r = m^2 - n^2$, unde m, n sunt numere întregi ($m > n$), să se calculeze raportul între *aria laterală* a conului (S) și *aria* sferei (I).

Să se calculeze apoi excesul volumului conului (S) asupra volumului sferei (I).

O. N. Ț.

Clasa V-a. Exerc. 745. Intr'un triunghi isoscel cunoaștem baza a și raza cercului înscris, r . Să se afle laturile egale.

N. M.

V. 746. Intr'un triunghi isoscel ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 2a$, înălțimea $\overline{AA'} = h$) să se calculeze distanța vârfului C la mediana $\overline{BB'}$.

V. GH.

V. 747. Pe raza $\overline{OA}$ a cercului (O), ca diametru, construim cercul (I). Să se determine pe tangenta în A la cercul (O) un punct P, astfel ca, dintre segmentele $\overline{MN}$ și $\overline{QS}$ de pe secanta comună PI și cuprinse între cele două cercuri, cel mai mic să fie cât jumătatea razei cercului (I).

O. N. Ț.

V. 748. Fie cercul (O) de centru O și raza R; $\overline{AB}$ un diametru al cercului (O); fie (I) cercul tangent interior în A cercului (O) și cuprinzând în interiorul său punctul O.

Să se determine pe tangenta în A la cercul (O) un punct P, astfel ca segmentul $\overline{MN}$, cel mai mic al secantei $\overline{PQ}$, dintre cele două cuprinse între cercurile (O) și (I), să aibă o lungime dată l . Discuție completă.

O. N. Ț.

V. 749. Pe raza $\overline{OA}$ a cercului (O), ca diametru, construim cercul (I), iar tangenta în A la cercul (O) luăm un punct P. Raza $\overline{OP}$ taie cercul (I) în punctul N și cercul (O) în punctul M.

Să se determine punctul P astfel ca:

$$\overline{MP} = 2 \overline{ON}.$$

O. N. Ț.

Clasa VI-a. Exerc. 740. Tangentele, duse dintr'un punct P la o sferă de centru O, formează un con, care are ca bază cercul (T) al punctelor de contact.

Să se determine unghiul făcut de raza sferei, care merge la unul din punctele de contact, cu OP, astfel încât aria calotei exterioare conului să fie medie proporțională între aria laterală a conului și aria bazei lui.

G. D. S.

VI. 741. Două plane paralele, având între ele distanța d , determină într'o sferă secțiile C_1 și C_2 și zona Z.

Să se calculeze distanța dela centrul sferei la planul cel mai apropiat, astfel încât aria zonei să fie media aritmetică a ariilor conurilor cu bazele C_1 și C_2 și cu vârful în centrul sferei. Dacă problema nu e posibilă să se modifice condițiile astfel ca să devină posibilă.

(Singurele date ale problemei sunt raza sferei și distanța d).

G. D. S.

VI. 742. Se dă un con circular drept cu vârful V și centrul cercului de bază O. Generatoarea face cu axul OV unghiul α . Un plan, ce trece prin V, taie cercul de bază în A și B. Notăm $\sphericalangle AOB = 2\beta$; $\sphericalangle AVB = 2\gamma$. Se cere :

1°. Relația ce există între unghiurile α , β , γ .

2°. Socotind unghiurile exprimate în *radiani*, să se exprime volumele celor două corpuri în care planul desparte conul.

3°. Să se calculeze raportul volumelor și ariilor laterale ale celor două corpuri în cazul particular $\beta = \frac{\pi}{4}$.

G. D. S.

VI. 743. Un sector circular de R, cu unghiul la centru 2β , se rotește în jurul unei axe OX, astfel încât $\sphericalangle AOX = \alpha$. Se cere :

1°. Să se găsească volumul înăscut de segmentul de cerc cuprins între coarda AB și arcul AB, exprimat cu ajutorul lui R, α și β ;

2°. Fie A' și B' proiecțiile punctelor A și B pe axa de rotație. Să se afle volumul înăscut prin rotirea trapezului ABB'A' în jurul axei, exprimat cu aceleași elemente.

3°. Dacă $\alpha = 0$, să se determine β astfel ca acele două volume să fie egale.

4°. În ce condiții volumul dela (1°) este dublul volumului dela (2°)?

G. D. S.

VI. 744. Să se pună expresia :

$E \equiv \sin^2 C (1 + \sin B)^2 - 4 \sin A \sin B [\cos A \cos B - \sin B \cos C]$
sub forma unui produs de doi factori.

G. D. S.

VI. 745. Fie un patrulater ABCD, ale cărui diagonale se taie în punctul O. Notăm cu r_1, r_2, r_3, r_4 și h_1, h_2, h_3, h_4 respectiv razele cercurilor înscrise și înălțimile ce pornesc din O, ale triunghiurilor OAB, OBC, OCD, ODA. Să se demonstreze că avem relația :

$$\left[\sum \frac{1}{r_1} - \sum \frac{1}{h_1} \right] \sin \varphi = 2 \left[\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} + \frac{1}{OD} \right]$$

în care φ este unghiul diagonalelor.

G. D. S.

Clasa VII-a. Exerc. 779. Fie dat un cerc și un arc AM pe cerc; N proiecția lui M pe raza OA și L un punct situat pe OM, astfel ca $\overline{OL} = \overline{ON}$. Să se calculeze

$$\lim \frac{\overline{LM}}{\overline{MN}}, \text{ când } M \rightarrow A.$$

C. I. B.

VII. 780. Dintre toate triunghiurile circumscrise aceluiași cerc, să se găsească acela pentru care

$$P = h_a h_b h_c$$

este minim (h_a, h_b, h_c fiind înălțimile unui triunghi).

C. I. B.

VII. 781. Se dau n cercuri în plan. Care este numărul maxim de tangente comune ce se pot duce?

C. I. B.

VII. 782. Să se reprezinte funcția

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

C. I. B.

VII. 783. Să se afle intersecția planului, definit de linia pământului OX și punctul A (1, 2, 2), cu planul ale cărui urme sunt paralele cu OX și duse: cea verticală la distanța 4 de OX, cea orizontală la distanța 6.

C. I. B.

VII. 784. Se dă funcția

$$y = \sin^2(x + a),$$

unde a este constant.

Să se exprime x ca funcție de y' și să se figureze reprezentarea grafică.

C. I. B.

VII. 785. Două mobile pleacă din punctul A situat pe un cerc, mișcându-se pe cerc în sensuri diferite: unul cu o mișcare uniformă de viteză unghiulară α , altul cu o mișcare uniform accelerată, cu accelerația $\frac{a}{n}$, viteza a . Raza cercului fiind na , să se afle punctul în care se întâlnesc și momentul la care se întâlnesc cele două mobile.

C. I. B.

Clasa VIII-a. Exerc. 556. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației:

$$6x^4 + 24x^3 + 31x^2 + 13x + 1 = 0.$$

G. D. S.

VIII. 557. Să se studieze realitatea rădăcinilor ecuației

$$\lambda x^4 + 4\lambda x^3 + (6\lambda - 5)x^2 + (4\lambda - 11)x + \lambda - 5 = 0$$

când parametrul λ variază.

G. D. S.

VIII. 558. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$f(x) \equiv 48x^5 - 459x^4 + 1402x^3 - 1377x^2 + 540x + 6\lambda = 0$$

când λ variază între $-\infty$ și $+\infty$.

GH. D.

VIII. 559. Fie ecuația:

$$f(x) \equiv 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x - 6a^3 = 0$$

în care $a > 0$.

Să se determine valorile lui a pentru care ecuația are toate rădăcinile reale.

GH. D.

VIII. 560. Fie ABC un triunghi dreptunghic, în care $A=90^\circ$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BA} = c$. Pe laturile AB, BC, CA considerăm respectiv punctele P, M, N astfel că avem: $\overline{AP} = \overline{BM} = \overline{CN} = x$ și astfel că dreptele AM, BN, CP sunt concurente.

Să se arate, că există o singură valoare pentru x , care îndeplinește această condiție.

Să se calculeze x în ipoteza: $b = 3$, $c = 4$, $a = 5$.

GH. D.

VIII. 561. Rădăcinile ecuației:

$$f(x) \equiv x^4 - 28x^3 + 277x^2 - 1170x + 1800 = 0$$

sunt laturile unui trapez isoscel ABCD ($\overline{BC} = \overline{AD}$).

Se cere:

a) Se se calculeze laturile trapezului;

b) Să se scrie ecuația iperbolei, care are ca *axă transversă* baza mare a trapezului; centrul în mijlocul acestei baze, trece prin extremitățile bazei mici și are ca focare extremitățile bazei mari.

c) Să se calculeze aria cuprinsă între bazele trapezului și ramurile iperbolei.

GH. D.

VIII. 562. Intr'un trunchiu de con cu razele bazelor r și R , cu înălțimea h , să se ducă un plan de secție paralel cu bazele astfel ca raportul volumelor obținute să fie λ .

O. N. Ț.

VIII. 563. Se dă semidreapta OX și pe ea un punct fix A. Considerăm punctul variabil M, astfel că $\sphericalangle MAO = 2 \sphericalangle MOA$.

a) Să se afle locul geometric al punctului M.

b) Considerăm punctul variabil N astfel că $\sphericalangle xAN = 2 \sphericalangle NOA$. Să se afle locul geometric al punctului N.

— La punctul b) cerem și soluția prin geometria elementară pură.

GH. D.

Exerciții Generale. Exerc. 463. Să se calculeze suma:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{3^{10}} - \frac{4}{3^{10} \cdot 11}.$$

GH. B.

E. G. 464. Să se demonstreze că numărul de 12 cifre de forma $aaaa4074aaaa$ nu poate fi cub perfect pentru nicio valoare a lui a .

GH. B.

E. G. 465. Să se arate că ecuația

$$3x^3 + y = 3x^3y$$

nu este posibilă în numere întregi.

GH. B.

E. G. 466. Laturile unui dreptunghi sunt măsurate de numere întregi; raportul dintre dimensiile dreptunghiului este $\frac{3}{2}$; perimetrul și aria sa sunt exprimate respectiv prin numere de forma $\overline{ab}$, $\overline{cda}$. Să se afle laturile acelui dreptunghi.

V. GH.

E. G. 467. Care sunt numerele de o cifră, x și y , care satisfac relația:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x, y),$$

$\varphi(n)$ fiind indicatorul lui n ?

I. L.

E. G. 468. Să se arate că suma indicatorilor a trei numere consecutive este totdeauna inferioară triplului numărului cel mai mic.

I. L.

E. G. 469. Să se arate că avem:

$$4n \leq \sum_1^n [\varphi(i)]^2 \leq \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$\varphi(i)$ fiind indicatorul lui i , iar $n \geq 5$.

I. L.

E. G. 470. Forma

$$F \equiv 3v^2 - 3v + 1$$

dă un șir de numere prime.

Să se determine forma numărului v astfel ca numerele F să fie divizibile cu 7; apoi cu 49. Aceeași chestiune pentru divizorul 13.

O. N. Ț.

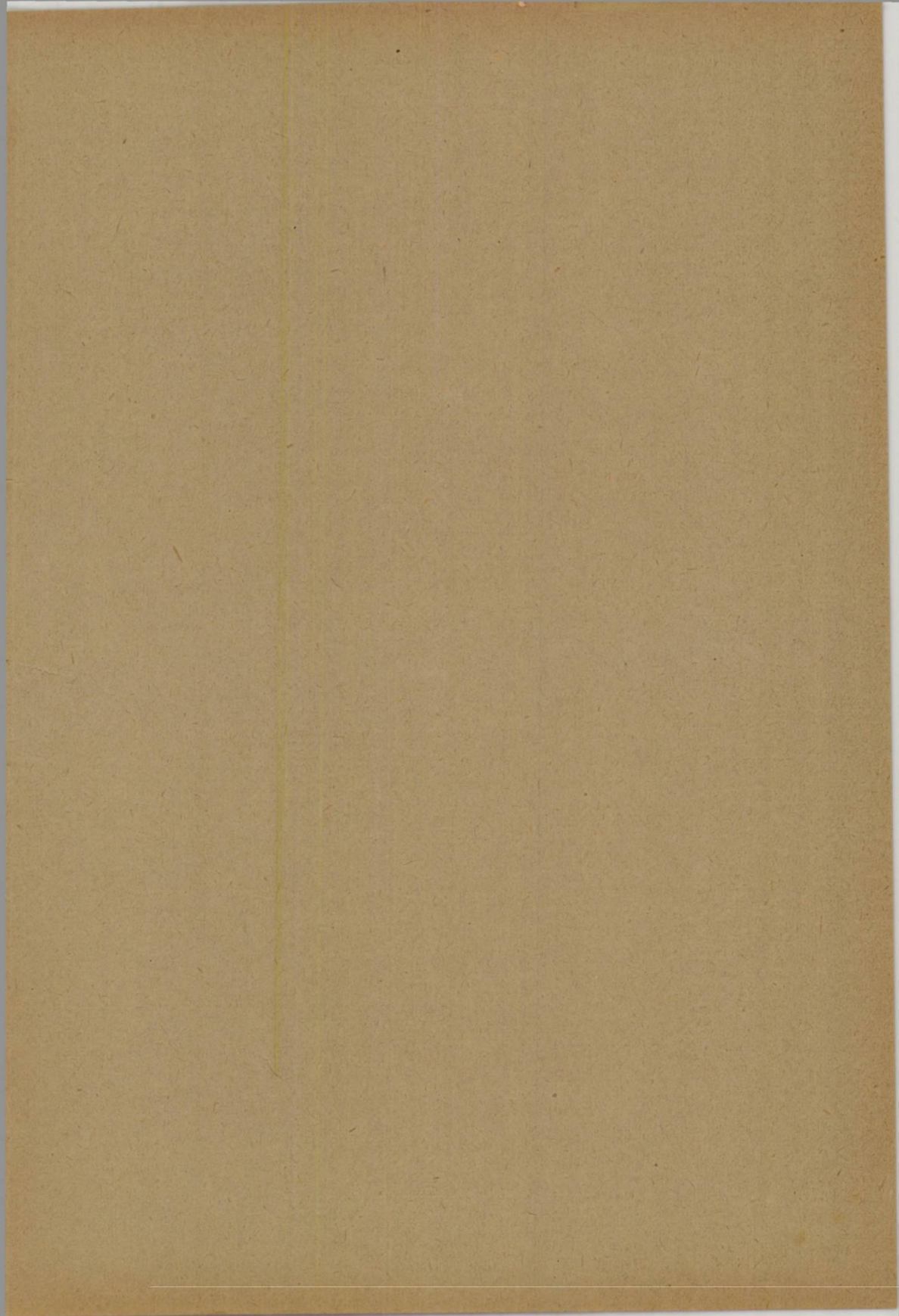
E. G. 471. Dacă v este prim cu 3, forma

$$F \equiv v^2 - 3v + 3$$

dă un șir de numere prime.

Să se determine forma lui v astfel ca numerele F să fie divizibile cu $7 \times 11 \times 13$.

O. N. Ț.



INSTRUCTIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității soluționând probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca „Gazetei Matematice” au apărut și se găsesc la adresa indicată mai sus, următoarele:

III. N. Abramescu, Lectiuni elementare de Algebră superioară, pentru
clasa VIII-a științifică. Ediția VI-a Lei 120

IX. G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu și
G. Titeica. Vocabular Matematic. Lei 20

X. G. Titeica, Culegere de Probleme de Geometrie	Lei 150
--	---------

XI. Gazeta Matematică 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar						
(500 pag.)	<table> <tr> <td>pentru particulari</td> <td>Lei 200</td> </tr> <tr> <td>pentru abonatii G. M. si S. G. M.</td> <td>Lei 150</td> </tr> </table>	pentru particulari	Lei 200	pentru abonatii G. M. si S. G. M.	Lei 150	
pentru particulari	Lei 200					
pentru abonatii G. M. si S. G. M.	Lei 150					

XII. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu Lei 95

XIII. I. Ionescu, Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica rațională Lei 190

XIV. V. Cristescu, Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediția II-a revăzută și adăugită de Gh. Th. Gheorghiu. [Lej 125]

XV. A. G. Ioachimescu, Culegere de Probleme de Algebră. Partea I.
 Ediția IV-a revăzută și mărită. Lei 120

XVI. G. Țițeica, Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Editia II-a, adăugită de <i>N. G. Botea</i>	Lei 120
--	------------------

XVII. **A. G. Ioachimescu**, Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Editia IV-a, revăzută și mărită. Lei 240

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui Euclid.* (Cărtile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 160

11. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 250

III. *Elementele lui Euclid*. (Cățile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPsicLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE TITEICA”

1. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* Lei 135

Suplimentul cu Exerciții. Abonamentul anual (9 numere) . . . Lei 80

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 250 lei anual, se plătește înainte și începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele și toată corespondența se trimite pe adresa :

Societății „GAZETA MATEMATICĂ”

Casa Gazeta Matematică. — Calea Grivitei No. 158. — București 2.

(Telefon : 3-9803).